# Le foncteur de bi-ensembles des modules de p-permutation

THÈSE N$^{O}$ 5338 (2012)

PRÉSENTÉE LE 21 MAI 2012

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE

CHAIRE DE THÉORIE DES GROUPES

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Mélanie BAUMANN

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Troyanov, président du jury
Prof. J. Thévenaz, directeur de thèse
Prof. E. Bayer Fluckiger, rapporteur
Prof. S. Bouc, rapporteur
Dr R. Stancu, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2012

# Remerciements

En préambule de ma thèse, je souhaite remercier toutes les personnes qui ont apporté leur aide à sa réalisation :

En premier, je souhaite remercier mon directeur de thèse, le Professeur Jacques Thévenaz, pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer ainsi que pour sa patience, ses précieux conseils et sa relecture. Sans lui, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.

Je tiens à remercier le Professeur Marc Troyanov pour avoir accepté d'être le président du jury ainsi que la Professeur Eva Bayer, le Professeur Serge Bouc et le Docteur Radu Stancu pour avoir acceptés d'être membres du jury.

Je remercie l'ensemble du personnel de la Chaire de Théorie des Groupes, ainsi que Mme Maria Cardoso et Mme Anna Dietler pour leur précieuse aide.

Je tiens à remercier mes parents pour leur soutien tout au long de mes études. Un remerciement tout particulier à Laurent, pour m'avoir encouragée et "supportée" tout au long de ces quatres années (ce ne fut pas toujours facile ;-) ). Je tiens aussi à remercier sa famille.

Je remercie les membres de la GNU Generation ainsi que de PolyLAN. Un remerciement particulier à Marianne. Je remercie aussi Maximilien pour m'avoir régulièrement empêché de travailler ;-) (et vive "Mon petit Poney" ...).

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide de nombreuses autres personnes. Que me pardonnent celles que je ne mentionne pas ici.

# Résumé


Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$, où $p$ est un nombre premier ou 0. Soient $G$ un groupe fini et $\mathrm{pp}_k(G)$ le groupe de Grothendieck des $kG$-modules de $p$-permutation. Si on le tensorise avec $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ devient un foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}$-linéaire.

On rappelle que les foncteurs de bi-ensembles simples $S_{H,V}$ sont paramétrisés par les paires $(H, V)$, où $H$ est un groupe fini et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple. Si on ne considère que les $p'$-groupes, alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k = \mathbb{C}R_k$ est le foncteur usuel des représentations et on connaît les foncteurs simples qui sont ses facteurs de composition. Si on ne considère que les $p$-groupes, alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k = \mathbb{C}B$ est le foncteur de Burnside et l'on connaît aussi les foncteurs simples qui sont ses facteurs de composition.

On veut trouver les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ en général. Pour atteindre cet objectif, on montre d'abord que les facteurs de composition des cas particuliers ci-dessus sont aussi des facteurs de composition pour $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. Puis on considère des groupes d'ordre petit pour essayer de trouver de nouveaux facteurs de composition. Cela nous amène à trouver les nouveaux facteurs de composition suivants :

- Les foncteurs simples $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$ et $S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $(m, \xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Leur multiplicité comme facteur de composition est égale à 1.
- Les foncteurs simples $S_{C_p\rtimes C_l,\mathbb{C}}$, où $l$ est un nombre premier à $p$, l'action de $C_l$ sur $C_p$ est fidèle et $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_l)$-module trivial. Leur multiplicité comme facteur de composition est égale à $\varphi(l)$.
- Les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ est un $B$-groupe fini $p$-hypo-élémentaire (dont on fait une classificiation explicite) et $\mathbb{C}$ le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial.

On montre aussi qu'apparaissent des foncteurs simples spécifiques, indexés par les groupes $C_3 \rtimes C_4$, $C_5 \rtimes C_4$ et $A_4$.

En route, on trouve tous les facteurs de composition du sous-foncteur des modules de permutation.



**Mots clés** : Foncteur de bi-ensembles, modules de $p$-permutation, facteurs de composition.

# Abstract

Let $k$ be an algebraically closed field of characteristic $p$, where $p$ is a prime number or 0. Let $G$ be a finite group and $\mathrm{pp}_k(G)$ be the Grothendieck group of $p$-permutation $kG$-modules. If we tensor it with $\mathbb{C}$, then $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ becomes a $\mathbb{C}$-linear biset functor.

Recall that the simple biset functor $S_{H,V}$ are parametrized by pairs $(H, V)$, where $H$ is a finite group and $V$ a simple $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module. If we only consider $p'$-groups, then $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k = \mathbb{C}R_k$ is the usual representation functor and we know the simple functors which are its composition factors. If we consider only $p$-groups, then $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k = \mathbb{C}B$ is the Burnside functor and we also know the simple functors which are its composition factors.

We want to find the composition factors of $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ in general. In order to achieve this, we first show that the composition factors from the special cases above are also composition factors for $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. Then, we consider groups of little order and try to find new composition factors. This leads us to find the following new composition factors :

- The simple factors $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$ and $S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi}$, where $(m, \xi)$ runs over the set of all pairs formed by a positive integer $m$ prime to $p$ and a primitive caracter $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Their multiplicity as composition factors is 1.
- The simple factors $S_{C_p\rtimes C_l,\mathbb{C}}$, where $l$ is a number prime to $p$, the action of $C_l$ on $C_p$ is faithful and $\mathbb{C}$ is the trivial $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_l)$-module. Their multiplicity as composition factors is $\varphi(l)$.
- The simple functors $S_{G,\mathbb{C}}$, where $G$ is a finite $p$-hypo-elementary $B$-group (for which an explicit classification is done) and $\mathbb{C}$ the trivial $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module.

We also show that some specific simple functors appear, indexed by the groups $C_3 \rtimes C_4$, $C_5 \rtimes C_4$ and $A_4$. On the way, we find all the composition factors of the sub-functor of permutation modules.

**Keywords** : Biset functor, $p$-permutation modules, composition factors.

# Table des matières

# Introduction

Le but de ma thèse est d'étudier les facteurs de composition du foncteur de bi-ensembles des modules de $p$-permutation. Plus précisément, soient $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ la catégorie dont les objets sont tous les groupes finis et $\mathrm{Hom}(G, H) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, G)$ (définition 2.15), où $B(H, G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de $(H, G)$-bi-ensembles finis. Un foncteur de bi-ensembles est un foncteur $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dans $\mathbb{C}$-mod (définition 2.17). Un facteur de composition d'un foncteur $F$ est un foncteur simple $S$ tel qu'il existe des sous-foncteurs $F_2 \subseteq F_1 \subseteq F$ dont le quotient $F_1/F_2$ est isomorphe à $S$. Les foncteurs de bi-ensembles simples $S_{H,V}$ sont paramétrés par les paires $(H, V)$, où $H$ est un groupe fini et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple (section 2.3).

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$ (où $p$ est un nombre premier ou 0). Le foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ est défini en un groupe $G$ comme le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation (section 2.2.1). Le but de ma thèse est de trouver les paires $(H, V)$, où $H$ est un groupe fini et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple, telles que $S_{H,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$.

J'ai commencé par étudier les foncteurs de bi-ensembles en général. Puis, j'ai défini le foncteur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ et j'ai vérifié que c'est bien un foncteur de bi-ensembles. L'étape suivante a été de montrer qu'en me restreignant aux $p$-groupes ou aux $p'$-groupes, j'obtiens des foncteurs déjà connus et étudiés par Serge Bouc ([Bou10], chapitre 5 et 7, pages 75-95 et 121-134). Plus précisément, si je me restreins à la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $p$-groupes, alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ est isomorphe au foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$ (section 4.1.2). Et si je me restreins à la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $p'$-groupes, alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ est isomorphe au foncteur des représentations ordinaires $\mathbb{C}R_k$ (section 4.1.1). Ces deux cas m'ont permis de trouver les premiers facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$.

En étudiant un peu plus la notion de facteur de composition pour des foncteurs, j'ai alors développé une méthode pour déterminer si des foncteurs simples $S_{G,V}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ pour un groupe d'ordre petit $G$ (section 4.3). Cela m'a permis de trouver de nouveaux facteurs de composition, par exemple ceux associés aux groupes $C_p \times C_p \times C_q$ ou $C_p \rtimes C_q$, où $q$ est un nombre premier différent de $p$. J'ai pu généraliser le deuxième cas aux groupes $C_p \rtimes C_l$, où $l$ est un nombre quelconque premier à $p$ (section 4.4).

L'étude de l'homomorphisme naturel de $\mathbb{C}B(G)$ dans $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ m'a amené à définir une transformation naturelle entre $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. L'image de ce morphisme est le sous-foncteur $\mathbb{C}\Pi_k$ de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ des modules de permutation. J'ai alors pu trouver tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\Pi_k$ (théorème 3.9) grâce à la description de ceux de $\mathbb{C}B$ ([Bou10], remarque 5.5.2, page 90) et cela m'a donné une nouvelle liste de facteurs de composition pour $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. Pour complèter cette description, j'ai fait une classification complète des $B$-groupes $p$-hypo-élémentaires (théorème 5.13).

Le cas des groupes $C_p \times C_p \times C_q$ a aussi été généralisé mais d'une manière différente : le fait que les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(P \times H)$ et $\mathbb{C}B(P) \otimes \mathbb{C}R_k(H)$ sont isomorphes, pour tout $p$-groupe $P$ et tout $p'$-groupe $H$, m'a amené à définir le produit tensoriel de deux foncteurs. Si l'on se restreint à la sous-catégorie de $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les groupes abéliens, alors les foncteurs $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ et $\mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k$ sont isomorphes et j'ai trouvé une description des facteurs de composition de $\mathbb{C}B \otimes \mathbb{C}R_k$ à partir de ceux de $\mathbb{C}B$ et de $\mathbb{C}R_k$ qui sont déjà connus. Ainsi tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ associés à des groupes abéliens sont connus (section 4.2).

Je commence par un petit rappel sur les notations utilisées dans ce travail. Le chapitre 1 contient un certain nombre de rappels sur les modules de $p$-permutation, en particulier sur la notion de source et de vortex, ainsi qu'une classification des $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables.

Le chapitre suivant commence par un rappel sur les bi-ensembles, ce qui permet de définir les foncteurs de bi-ensembles, illustré par la définition du foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ des modules de $p$-permutation. La partie suivante du chapitre 2 contient un certain nombre de résultats sur les foncteurs simples et les facteurs de composition, ce qui permet de traiter les facteurs de composition des foncteurs $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}R_k$. Le chapitre se termine par une partie sur la dimension des évaluations des foncteurs simples et la définition du produit tensoriel de deux foncteurs de bi-ensembles.

Le chapitre 3 contient la classification des facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}\Pi_k$ des modules de permutation, grâce à la définition d'une transformation naturelle entre $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\Pi_k$.

Le chapitre 4 contient les résultats sur les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. Puis précisément, on commence par décrire les facteurs de composition obtenus à partir de cas connus, c'est-à-dire, par la restriction à la sous-catégorie des $p$-groupes ou celle des $p'$-groupes ainsi que ceux obtenus grâce au sous-foncteur $\mathbb{C}\Pi_k$. Cette partie se termine par un résumé des facteurs de composition ainsi obtenus. La suite du chapitre 4 contient tous les facteurs de composition associés à un groupe de la forme $P \times H$, où $P$ est un $p$-groupe abélien et $H$ est un $p'$-groupe. En particulier, cela traite le cas des facteurs de composition associés à un groupe abélien. Puis je décris ma méthode pour traiter les facteurs de composition associés à des groupes d'ordre petit. J'applique alors cette méthode aux groupes $C_p \rtimes C_l$, où $l$ est un nombre premier à $p$, puis aux groupes $C_3 \rtimes C_4$, $C_5 \rtimes C_4$ et $A_4$. Je conclus ce chapitre par un résumé des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ connus ainsi que quelques conjectures.

Le dernier chapitre contient une description des $B$-groupes de la forme $P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe et $H$ un $p'$-groupe résoluble. En particulier, je classifie les $B$-groupes $p$-hypo-élémentaires.

La première annexe contient les résultats de mes calculs pour de petits groupes. En particulier, je dis si c'est un $B$-groupe et quels sont les facteurs de composition associés à ce groupe. La méthode pour calculer les facteurs de composition associés à des petits groupes utilise une récurrence qui suppose que l'on connaisse les facteurs de composition associés à des sous-quotients propres. Par conséquent, ces résultats sont utiles pour le chapitre 4 où j'utilise plusieurs fois cette méthode.

L'annexe B contient juste une description des caractères primitifs pour de petits groupes ainsi que leur noyau, ce qui est utile pour appliquer le théorème 2.67.

Voici quelques références importantes sur les foncteurs de bi-ensembles. Je ne cite que les plus importantes ou celles qui m'ont beaucoup servi pour ce travail.

D'abord, l'acticle en français *Foncteurs d'ensembles munis d'une double action* de Serge Bouc, [Bou96], qui m'a permis de comprendre l'origine du sujet, ainsi que son livre *Biset functors for finite groups*, [Bou10], qui est ma principale référence sur le sujet. L'article *Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces* de Peter Webb, [Web93], m'a permis de clarifier la notion de facteur de composition, notion essentielle pour ma thèse.

Pour l'anneau des modules de $p$-permutation, le début est dû à Conlon, puis à Michel Broué pour la terminologie ([Bro85]). Ma principale référence pour ce sujet, a été *Representations and cohomology I* de D. J. Benson, [Ben04].

# Notations

Voici quelques notations utilisées dans ce projet :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$ ;
- $\mathbb{N}^\star$ est l'ensemble des entiers naturels non-nuls $\{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ ;
- Soient $p$ un nombre premier et $n$ un entier strictement positif. On note $\mathbb{F}_{p^n}$ l'unique corps (à isomorphisme près) à $p^n$ éléments ;
- Si $k$ est un corps, alors on note $\overline{k}$ sa clôture algébrique ;
- Soit $E$ un ensemble, on note $|E|$ la cardinalité de cet ensemble ;
- Pour tout entier strictement positif $n$, on note $\xi_n$ une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité (par exemple $\xi_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$).

Soit $G$ un groupe. On note $H \leq G$ si $H$ est un sous-groupe de $G$ et $H < G$ si $H$ est un sous-groupe propre de $G$. Similairement, on note $H \trianglelefteq G$ si $H$ est un sous-groupe normal de $G$ et $H \triangleleft G$ si $H$ est un sous-groupe normal propre de $G$. Par $H \leq_G G$, on dénote un sous-groupe $H$ de $G$, à conjugaison près (dans $G$). On note $G \gg H$ si $H$ est isomorphe à un quotient de $G$. On note $\mathbf{1}$ le groupe trivial et $1_G$ (ou parfois $1$ si le groupe $G$ est clair par le contexte) l'élément neutre de $G$.

On note $G^{\mathrm{op}}$ le groupe opposé de $G$ : l'ensemble sous-jacent est l'ensemble $G$ et la loi de composition dans $G^{\mathrm{op}}$ est définie par

$$g \star h \text{ (dans } G^{\mathrm{op}}) = h \cdot g \text{ (dans } G), \quad \forall\, g, h \in G.$$

On note $\Phi(G)$ le groupe de Frattini de $G$.

Soit $X$ un $G$-ensemble ($X$ est muni d'une action à gauche de $G$). Alors on note $G\backslash X$ l'ensemble des $G$-orbites de $X$ et $[G\backslash X]$ un ensemble de représentants des $G$-orbites. De manière analogue, on définit $X/G$ et $[X/G]$ dans le cas où $X$ est muni d'une action à droite de $G$.

Soit $H$ un sous-groupe de $G$. On note $N_G(H)$ le normalisateur de $H$ dans $G$, c'est-à-dire

$$N_G(H) = \big\{g \in G \,\big|\, gHg^{-1} = H\big\}.$$

On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de $G$, c'est-à-dire l'ensemble des isomorphismes de groupes de $G$ dans lui-même. De même, $\mathrm{Inn}(G)$ correspond à tous les automorphismes intérieurs (correspondant à la conjugaison par un élément de $g$). Le quotient $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$ est le groupe des automorphismes extérieurs de $G$.

On note $[U]$ la classe d'isomorphisme de $U$, où $U$ peut être un groupe, un espace vectoriel, un module, un $G$-ensemble, un $(H, G)$-bi-ensemble, ...

Tous les corps considérés sont algébriquement clos (sauf mention du contraire). Tous les groupes considérés sont finis. Tous les modules considérés sont de génération finie et tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

En particulier, $G$ est un groupe fini et $k$ est un corps algébriquement clos, en général de caractéristique $p$, où $p$ est un nombre premier ou zéro (sauf dans le chapitre 4 et l'annexe A, où la caractéristique sera des fois notée $\mathrm{car}(k)$).

# Chapitre 1

# L'anneau des modules de $p$-permutation

Dans ce chapitre, $k$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p$, où $p$ est un nombre premier ou zéro.

## 1.1 Projectivité relative et transfert

**Définition 1.1:** [Ben04, définition 3.6.1, page 68]
*Soient $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Un $kG$-module $M$ est dit **projectif relativement à** $H$ ou **relativement $H$-projectif** si pour tous $kG$-modules $M_1$ et $M_2$, pour tout $kG$-homomorphisme $\lambda : M \to M_1$ et pour tout $kG$-homomorphisme surjectif $\mu : M_2 \to M_1$ tels qu'il existe un homomorphisme de $kH$-modules $\nu : \mathrm{Res}^G_H M \to \mathrm{Res}^G_H M_2$ avec $\lambda = \mu \circ \nu$, il existe un homomorphisme de $kG$-modules $\widetilde{\nu} : M \to M_2$ avec $\lambda = \mu \circ \widetilde{\nu}$.*

**Remarques 1.2:** [Ben04, page 68]

1. Si $H = \mathbf{1}$, cela correspond à la définition de $kG$-module projectif.
2. De manière analogue, on peut définir la notion de **relativement $H$-injectif**.

**Définition 1.3:** [Ben04, page 68]
*Soient $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Une suite exacte courte de $kG$-modules est dite **$H$-scindée** si elle est scindée comme suite exacte courte de $kH$-modules.*

**Définition 1.4:** [Ben04, définition 3.6.2, page 68]
*Soit $G$ un groupe fini, $H$ un sous-groupe de $G$ et $M, M'$ des $kG$-modules. On définit **l'application de transfert** ou **trace***

$$\mathrm{Tr}_{H,G} : \mathrm{Hom}_{kH}(\mathrm{Res}^G_H M', \mathrm{Res}^G_H M) \to \mathrm{Hom}_{kG}(M', M)$$

*comme suit :*

$$\mathrm{Tr}_{H,G}(\alpha)(m) = \sum_{g \in [G/H]} g\alpha(g^{-1}m)$$

*pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{kH}(\mathrm{Res}^G_H M', \mathrm{Res}^G_H M)$ et pour tout $m \in M'$.*

*Étant donné que $\alpha$ est un homomorphisme de $kH$-modules, $g\alpha(g^{-1}m)$ ne dépend que de la classe $gH$ et ainsi l'application $\mathrm{Tr}_{H,G}$ est indépendante du choix des représentants des classes à gauche modulo $H$.*

**Proposition 1.5** (D. G. Higman)**:** [Ben04, proposition 3.6.4, page 70]
*Soient $G$ un groupe fini, $H$ un sous-groupe de $G$ et $M$ un $kG$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i) Le module $M$ est relativement $H$-projectif.*

*ii) Tout épimorphisme $H$-scindé (qui se scinde comme homomorphisme de $kH$-modules) de $kG$-modules $\lambda : M' \to M$ est scindé.*

*iii) Le module $M$ est relativement $H$-injectif.*

*iv) Tout monomorphisme $\mu : M \to M'$ de $kG$-modules $H$-scindé est scindé.*

*v) Le module $M$ est un facteur direct de $\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G M$.*

*vi) Le module $M$ est un facteur direct d'un module induit depuis $H$.*

*vii) Critère de Higman : l'application identité $\mathrm{Id}_M$ de $M$ est dans l'image de $\mathrm{Tr}_{H,G}$.*

**Corollaire 1.6:** [Ben04, corollaire 3.6.9, page 72]
*Soient $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. On suppose que $[G : H]$ est inversible dans $k$. Alors tout $kG$-module $M$ est relativement $H$-projectif.*

## 1.2 Vortex et Source

**Définition 1.7:** [Ben04, définition 3.10.1, page 83]
*Soient $G$ un groupe fini et $M$ un $kG$-module indécomposable. Alors un sous-groupe $D$ de $G$ est un **vortex** de $M$ si $M$ est relativement $D$-projectif et $M$ n'est pas relativement $D'$-projectif pour tout sous-groupe propre $D'$ de $D$.*

*Une **source** de $M$ est un $kD$-module indécomposable $M_0$, où $D$ est un vortex de $M$, tel que $M$ soit un facteur direct de $\mathrm{Ind}_D^G M_0$ (un tel $M_0$ existe toujours par la proposition 1.5).*

**Définition 1.8:** [Ben04, page 61]
*Soient $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Soit $M$ un $kH$-module. On écrit $g \otimes M$ ou ${}^gM$ pour le $k\,{}^gH$-module avec $(ghg^{-1})(g \otimes m) = g \otimes hm$, pour tout $g \otimes m \in {}^gM$ et pour tout $ghg^{-1} \in {}^gH$.*

**Proposition 1.9:** [Ben04, proposition 3.10.2, page 83]
*Soient $G$ un groupe fini et $M$ un $kG$-module indécomposable.*

*i) Les vortex de $M$ sont conjugués dans $G$.*

*ii) Soient $M_0$ et $M_1$ deux $kD$-modules qui sont des sources de $M$, où $D$ est un vortex de $M$. Alors il existe $g \in N_G(D)$ tel que $M_0 \cong {}^gM_1$.*

*iii) Les vortex de $M$ sont des $p$-groupes (Si $p = 0$, le seul $0$-groupe est le groupe trivial).*

**Définition 1.10:** [Ben04, définition 3.11.1, page 84]
*Soit $G$ un groupe fini. Un $kG$-module $M$ est un $kG$-module de **source triviale** si tout facteur direct indécomposable de $M$ a le module trivial comme source.*

## 1.3 La correspondance de Green

Soit $G$ un groupe fini. Soit $D$ un $p$-sous-groupe fixé de $G$ (si $p = 0$, le seul 0-groupe est le groupe trivial) et soit $H$ un sous-groupe de $G$ contenant $N_G(D)$.

**Notation 1.11:** [Ben04, page 85]
*On pose :*

$$\mathcal{X} = \{X \leq G \,\big|\, X \leq {}^gD \cap D,\ \textit{pour un certain } g \in G - H\}$$

$$\mathcal{Y} = \{Y \leq G \,\big|\, Y \leq {}^gD \cap H,\ \textit{pour un certain } g \in G - H\}$$

*On a clairement que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ et que $D \notin \mathcal{X}$, $D \notin \mathcal{Y}$.*

**Théorème 1.12** (La correspondance de Green)**:** [Ben04, théorème 3.12.2, page 85]
*Il existe une bijection entre les $kG$-modules indécomposables de vortex $D$ et les $kH$-modules indécomposables de vortex $D$, donnée comme suit :*

*i) Si $V$ est un $kG$-module indécomposable de vortex $D$, alors $\operatorname{Res}^G_H V$ a un unique facteur direct indécomposable $f(V)$ de vortex $D$, et les autres facteurs directs (indécomposables) ont leur vortex dans $\mathcal{Y}$.*

*ii) Si $M$ est un $kH$-module indécomposable de vortex $D$, alors $\operatorname{Ind}^G_H M$ a un unique facteur direct indécomposable $g(M)$ de vortex $D$, et les autres facteurs directs (indécomposables) ont leur vortex dans $\mathcal{X}$.*

*iii) On a $f(g(M)) \cong M$ et $g(f(V)) \cong V$.*

*iv) Les bijections $f$ et $g$ envoient les modules de source triviale sur des modules de source triviale.*

## 1.4 Les modules de $p$-permutation

**Définition 1.13:** *Soient $G$ un groupe fini et $M$ un $kG$-module. Alors $M$ est un module de* ***permutation*** *s'il existe un $G$-ensemble $X$ tel que $M = kX$ (c'est-à-dire que $M$ possède une base qui est $G$-stable).*

**Définition 1.14:** *Soient $G$ un groupe fini et $M$ un $kG$-module. Alors $M$ est un module de* ***$p$-permutation*** *si c'est un facteur direct d'un module de permutation.*

**Lemme 1.15:** [Ben04, lemme 3.11.2, page 84]
*Soit $G$ un groupe fini. Un $kG$-module $M$ est de source triviale si et seulement si c'est un facteur direct d'un module de permutation, c'est-à-dire si et seulement si c'est un module de $p$-permutation.*

**Corollaire 1.16:** *Soient $k$ un corps et $G$ un groupe fini. Un $kG$-module indécomposable $M$ est de source triviale si et seulement si c'est un facteur direct de $\operatorname{Ind}^G_D k$ pour un certain sous-groupe $D$ de $G$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du lemme précédent et du fait que $\operatorname{Ind}^G_D k = k[G/D]$ est un $kG$-module de permutation. □

**Définition 1.17:** *Soit $G$ un groupe fini. On définit $\mathrm{pp}_k(G)$ comme le groupe de Grothendieck de l'ensemble des classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation (le groupe de Grothendieck est pris par rapport à la somme directe, c'est-à-dire par rapport aux relations $[M \oplus N] - [M] - [N]$).*

**Remarque 1.18:** Soit $G$ un groupe fini. L'ensemble des classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathrm{pp}_k(G)$.

## 1.5 Classification des modules de $p$-permutation

Le but de cette section est de donner une classification des $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables. Ces résultats peuvent être trouvés dans [Bro85], théorème 3.2 ainsi que dans [Thé95], théorème 27.10, page 224.

Soit $G$ un groupe fini. Par la proposition 1.9, on sait que le vortex d'un $kG$-module indécomposable est toujours un $p$-groupe. Soit $D$ un $p$-sous-groupe de $G$. On veut trouver tous les $kG$-modules indécomposables de source triviale et de vortex $D$. Par la correspondance de Green (théorème 1.12), cela revient à déterminer tous les $kN_G(D)$-modules indécomposables de source triviale et de vortex $D$. Par conséquent, on cherche tous les facteurs directs indécomposables de $\mathrm{Ind}_D^{N_G(D)} k$. Or

$$\mathrm{Ind}_D^{N_G(D)} k \cong k[N_G(D)/D] = \mathrm{Inf}_{N_G(D)/D}^{N_G(D)} k[N_G(D)/D]$$

et

$$\mathrm{Def}_{N_G(D)/D}^{N_G(D)} \mathrm{Inf}_{N_G(D)/D}^{N_G(D)} k[N_G(D)/D] = k[N_G(D)/D]$$

(la déflation est définie dans la remarque 2.62). Ainsi, via l'inflation, on a une bijection entre les facteurs directs indécomposables du $kN_G(D)$-module $\mathrm{Ind}_D^{N_G(D)} k$ et ceux du $kN_G(D)/D$-module régulier. Or les facteurs directs indécomposables du $kN_G(D)/D$-module régulier sont exactement les $kN_G(D)/D$-modules projectifs indécomposables. Ainsi :

**Théorème 1.19:** *Il existe une bijection entre les $kG$-modules indécomposables de $p$-permutation et les paires $(D, P)$, où $D$ un $p$-sous-groupe de $G$, à conjugaison près, et $P$ est un $kN_G(D)/D$-module projectif indécomposable, à isomorphisme près.*

**Théorème 1.20:** *Soit $G$ un groupe fini. Le nombre de classes d'isomorphisme de $kG$-modules projectifs indécomposables est égal au nombre de classes de conjugaison de $p'$-éléments dans $G$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du fait que le nombre de classes d'isomorphisme de $kG$-modules projectifs indécomposables est égale au nombre de classes d'isomorphisme de $kG$-modules simples et du corollaire 5.3.5, page 177 de [Ben04]. $\square$

**Notation 1.21:** *Soient $G$ un groupe fini et $p$ un nombre premier. On note $\ell_p(G) = \ell(G)$ le nombre de classes de conjugaison de $p'$-éléments dans $G$.*

**Corollaire 1.22:** *Soit $G$ un groupe fini. Le nombre de classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables est égal à*

$$\sum_D \ell_p(N_G(D)/D)$$

*où $D$ parcourt les $p$-sous-groupes de $G$, à conjugaison près. En particulier, il y en a qu'un nombre fini.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des deux théorèmes précédent et de la remarque 1.18. □

### 1.5.1 Le cas des groupes de la forme $P \rtimes H$

Soit $G \cong P \rtimes H$ un groupe fini, où $P$ est un $p$-groupe et $H$ un $p'$-groupe. Alors, grâce à la proposition suivante, on peut décrire plus en détail les $kG$-modules de $p$-permutation, en donnant une classification des $kN_G(D)/D$-modules projectifs indécomposables. Si $G$ est un groupe de la forme $P \rtimes H$, alors c'est aussi le cas pour ses sous-quotients.

**Proposition 1.23:** *Soit $G$ un groupe fini. On suppose que $G \cong P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe et $H$ un $p'$-groupe. Un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de $kG$-modules projectifs indécomposables est donné par $\mathrm{Ind}_H^G V$, où $V$ parcourt un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de $kH$-modules irréductibles.*

*Démonstration.* Les $kG$-modules irréductibles sont en bijection avec les $kH$-modules irréductibles, via l'inflation de $G/P \cong H$ à $G$. A partir de là, il suffit de trouver les couvertures projectives des $kG$-modules irréductibles. On peut remarquer que $H$ est aussi un sous-groupe de $G$. Quel est le lien entre $\mathrm{Inf}_{G/P}^G V$ et $\mathrm{Ind}_H^G V$ pour un $kH$-module $V$ irréductible.

Premièrement, on peut remarquer que, étant donné que $V$ est projectif (car c'est un $kH$-module et $H$ est d'ordre premier à $p$) et que l'induction préserve la projectivité, $\mathrm{Ind}_H^G V$ est un $kG$-module projectif.

Par la réciprocité de Frobenius ([Ben04], proposition 3.3.1, page 60) et le lemme de Schur ([CR88], lemme 27.3, page 181), on a

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Ind}_H^G V, \mathrm{Inf}_H^G V) = \mathrm{Hom}_{kH}(V, \underbrace{\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Inf}_H^G V}_{\cong V}) = k.$$

Soit $W$ un $kH$-module irréductible différent de $V$. Alors, par un raisonnement similaire

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Ind}_H^G V, \mathrm{Inf}_H^G W) = \mathrm{Hom}_{kH}(V, \underbrace{\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Inf}_H^G W}_{\cong W}) = 0.$$

Comme on a l'ensemble des $kG$-modules irréductibles en inflatant les $kH$-modules irréductibles, cela implique que

$$\mathrm{Top}(\mathrm{Ind}_H^G V) = \mathrm{Inf}_H^G V.$$

Par conséquent $\mathrm{Ind}_H^G V$ est la couverture projective de $\mathrm{Inf}_H^G V$. Ainsi $\mathrm{Ind}_H^G V$, où $V$ parcourt tous les $kH$-modules irréductibles, donne tous les $kG$-modules projectifs indécomposables. □

# Chapitre 2

# Fonceurs de bi-ensembles

## 2.1 Rappels sur les bi-ensembles

**Définition 2.1:** [Bou10, définition 2.3.1, page 18]
*Soient $G$ et $H$ deux groupes finis. Un $(H,G)$-**bi-ensemble** $U$ est un ensemble $U$ muni d'une action à gauche de $H$ et d'une action à droite de $G$ telles que*

$$(h \cdot u) \cdot g = h \cdot (u \cdot g),$$

*pour tout $g \in G$, pour tout $u \in U$ et pour tout $h \in H$.*

**Remarque 2.2:** [Bou10, remarque 2.3.2, pages 18-19]
Cela est équivalent à un $(H \times G^{\mathrm{op}})$-ensemble. En particulier, toutes les notions qui s'appliquent pour les $G$-ensembles sont aussi valables pour les $(H,G)$-bi-ensemble. En particulier, si $U$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, on note $H\backslash U/G$ l'ensemble des $(H,G)$-orbites et $[H\backslash U/G]$ un ensemble de représentants des $(H,G)$-orbites.

**Lemme 2.3:** [Bou10, lemme 2.3.4, page 19]
*Soient $G$ et $H$ des groupes finis.*

*i) Soit $L$ un sous-groupe de $H \times G$, alors l'ensemble $(H \times G)/L$ est un $(H,G)$-bi-ensemble transitif pour l'action définie par :*

$$h \cdot (b,a)L \cdot g = (hb, g^{-1}a)L,$$

*pour tout $h \in H$, pour tout $(b,a)L \in (H \times G)/L$ et pour tout $g \in G$.*

*ii) Si $U$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, alors il existe un isomorphisme de $(H,G)$-bi-ensembles*

$$U \cong \bigsqcup_{u \in [H\backslash U/G]} (H \times G)/L_u,$$

*où $L_u = (H,G)_u$ est le stabilisateur de $u$ dans $H \times G$, c'est-à-dire le sous-groupe de $H \times G$ définit par*

$$(H,G)_u = \left\{(h,g) \in H \times G \,\middle|\, h \cdot u = u \cdot g\right\}.$$

*En particulier, tout $(H,G)$-bi-ensemble transitif est isomorphe à $(H \times G)/L$, pour un certain sous-groupe $L$ de $H \times G$.*

**Définition 2.4:** [Bou10, définition 2.3.11, page 21]
*Soient $G$, $H$ et $K$ des groupes finis. Si $U$ est un $(H,G)$-bi-ensemble et $V$ un $(K,H)$-bi-ensemble, la composition de $V$ et $U$ est l'ensemble des $H$-orbites sur le produit cartésien $V \times U$, où l'action à droite de $H$ est définie par :*

$$(v,u)\cdot h = (v\cdot h, h^{-1}\cdot u),$$

*pour tout $(v,u) \in V \times U$ et pour tout $h \in H$. Il est noté par $V \times_H U$ . La $H$-orbite de $(v,u) \in V \times U$ est dénoté par $(v,_H u)$. L'ensemble $V \times_H U$ est un $(K,G)$-bi-ensemble pour l'action définie par :*

$$k\cdot(v,_H u)\cdot g = (k\cdot v,_H u\cdot g)$$

*pour tout $k \in K$, pour tout $(v,_H u) \in V \times_H U$ et pour tout $g \in G$.*

**Exemple 2.5:** [Bou10, exemples 2.3.3 et 2.3.9, page 19-20]
Soit $G$ un groupe fini.

- L'ensemble $G$ est un $(G,G)$-bi-ensemble pour l'action à gauche et à droite définies par la multiplication à gauche et à droite par $G$. Ce bi-ensemble est noté $\mathrm{Id}_G$.
- Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Alors l'ensemble $G$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, noté $\mathrm{Res}^G_H$, pour les actions données par la multiplication à gauche par $H$ et à droite par $G$.
- Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Alors l'ensemble $G$ est un $(G,H)$-bi-ensemble, noté $\mathrm{Ind}^G_H$, pour les actions données par la multiplication à gauche par $G$ et à droite par $H$.
- Soient $N$ un sous-groupe normal de $G$ et $H = G/N$. Alors l'ensemble $H$ est un $(G,H)$-bi-ensemble, noté $\mathrm{Inf}^G_H$, pour les actions données par la projection dans $H$ suivi de la multiplication à gauche par $H$ et la multiplication à droite par $H$.
- Soient $N$ un sous-groupe normal de $G$ et $H = G/N$. Alors l'ensemble $H$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, noté $\mathrm{Def}^G_H$, pour les actions données par la multiplication à gauche par $H$ et la projection dans $H$ suivi de la multiplication à droite par $H$.
- Soit $f : G \to H$ est un isomorphisme de groupes finis. Alors l'ensemble $H$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, noté $\mathrm{Iso}(f)$ ou $\mathrm{Iso}^H_G$ si l'isomorphisme $f$ est clair du contexte, pour la multiplication à gauche par $H$ et l'image par $f$ suivi de la multiplication à droite par $H$.

**Proposition 2.6:** [Bou10, section 1.1, pages 1-6]
*Soit $G$ un groupe fini. Les bi-ensembles définis ci-dessus satisfont les relations suivantes :*

1. *Transitivité :*

   (a) *Si $K$ et $H$ sont des sous-groupes de $G$ avec $K \leq H \leq G$, alors*

   $$\mathrm{Res}^H_K \times_H \mathrm{Res}^G_H \cong \mathrm{Res}^G_K, \qquad \mathrm{Ind}^G_H \times_H \mathrm{Ind}^H_K \cong \mathrm{Ind}^G_K .$$

   (b) *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ et $\psi : H \longrightarrow K$ sont des isomorphismes de groupes, alors*

   $$\mathrm{Iso}(\psi) \times_H \mathrm{Iso}(\varphi) \cong \mathrm{Iso}(\psi \circ \varphi).$$

(c) *Si $N$ et $M$ sont des sous-groupes normaux de $G$ avec $N \leq M$, alors*

$$\mathrm{Inf}_{G/N}^{G} \times_{G/N} \mathrm{Inf}_{G/M}^{G/N} \cong \mathrm{Inf}_{G/M}^{G}, \qquad \mathrm{Def}_{G/M}^{G/N} \times_{G/N} \mathrm{Def}_{G/N}^{G} \cong \mathrm{Def}_{G/M}^{G}.$$

2. *Commutativité :*

   (a) *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un isomorphisme de groupes et $K$ un sous-groupe de $G$, alors*

   $$\mathrm{Iso}(\varphi') \times_K \mathrm{Res}_K^G \cong \mathrm{Res}_{\varphi(K)}^H \times_H \mathrm{Iso}(\varphi)$$
   $$\mathrm{Iso}(\varphi) \times_G \mathrm{Ind}_K^G \cong \mathrm{Ind}_{\varphi(K)}^H \times_{\varphi(K)} \mathrm{Iso}(\varphi'),$$

   *où $\varphi' : K \longrightarrow \varphi(K)$ est la restriction de $\varphi$ à $K$.*

   (b) *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un isomorphisme de groupes et $N$ est un sous-groupe normal de $G$, alors*

   $$\mathrm{Iso}(\varphi'') \times_{G/N} \mathrm{Def}_{G/N}^G \cong \mathrm{Def}_{H/\varphi(N)}^H \times_H \mathrm{Iso}(\varphi)$$
   $$\mathrm{Iso}(\varphi) \times_G \mathrm{Inf}_{G/N}^G \cong \mathrm{Inf}_{H/\varphi(N)}^H \times_{H/\varphi(N)} \mathrm{Iso}(\varphi''),$$

   *où $\varphi'' : G/N \longrightarrow H/\varphi(N)$ est l'isomorphisme de groupes induit par $\varphi$.*

   (c) ***Formule de Mackey*** *: Si $H$ et $K$ sont des sous-groupes de $G$, alors*

   $$\mathrm{Res}_H^G \times_G \mathrm{Ind}_K^G \cong \sum_{x \in [H\backslash G/K]} \mathrm{Ind}_{H \cap {}^xK}^H \times_{H \cap {}^xK} \mathrm{Iso}(\gamma_x) \times_{H^x \cap K} \mathrm{Res}_{H^x \cap K}^K,$$

   *où $\gamma_x : H^x \cap K \longrightarrow H \cap {}^xK$ est l'isomorphisme de groupes induit par la conjugaison par $x$.*

   (d) *Si $N$ et $M$ sont des sous-groupes normaux de $G$, alors*

   $$\mathrm{Def}_{G/N}^G \times_G \mathrm{Inf}_{G/M}^G \cong \mathrm{Inf}_{G/NM}^{G/N} \times_{G/NM} \mathrm{Def}_{G/NM}^{G/M}.$$

   (e) *Si $H$ est un sous-groupe de $G$ et $N$ un sous-groupe normal de $G$, alors*

   $$\mathrm{Def}_{G/N}^G \times_G \mathrm{Ind}_H^G \cong \mathrm{Ind}_{HN/N}^{G/N} \times_{HN/N} \mathrm{Iso}(\varphi) \times_{H/H\cap N} \mathrm{Def}_{H/H\cap N}^H,$$
   $$\mathrm{Res}_H^G \times_G \mathrm{Inf}_{G/N}^G \cong \mathrm{Inf}_{H/H\cap N}^H \times_{H/H\cap N} \mathrm{Iso}(\varphi^{-1}) \times_{HN/N} \mathrm{Res}_{HN/N}^{G/N},$$

   *où $\varphi : H/H \cap N \longrightarrow HN/N$ est l'isomorphisme de groupes canonique.*

   (f) *Si $H$ est un sous-groupe de $G$, si $N$ est un sous-groupe normal de $G$ et si $N \leq H$, alors*

   $$\mathrm{Res}_{H/N}^{G/N} \times_{G/N} \mathrm{Def}_{G/N}^G \cong \mathrm{Def}_{H/N}^H \times_H \mathrm{Res}_H^G,$$
   $$\mathrm{Ind}_H^G \times_H \mathrm{Inf}_{H/N}^H \cong \mathrm{Inf}_{G/N}^G \times_{G/N} \mathrm{Ind}_{H/N}^{G/N}.$$

3. *Trivialité :*
   *Si $G$ est un groupe fini, alors*

   $$\mathrm{Res}_G^G = \mathrm{Id}_G, \mathrm{Ind}_G^G = \mathrm{Id}_G, \mathrm{Def}_{G/\mathit{1}}^G = \mathrm{Id}_G, \mathrm{Inf}_{G/\mathit{1}}^G = \mathrm{Id}_G$$
   $$\mathrm{Iso}(\varphi) \cong \mathrm{Id}_G, \text{ si } \varphi \text{ est un automorphisme intérieur.}$$

**Définition 2.7:** [Bou10, définition 2.3.12, page 21]
*Soit $G$ un groupe fini. Une* **section** $(T,S)$ *de $G$ est une paire $(T,S)$ de sous-groupes de $G$ telle que $S \trianglelefteq T$.*

**Lemme 2.8:** [Bou10, lemme 2.3.25, page 26]
*Soient $G$ et $H$ deux groupes finis.*

*i) Si $(D,C)$ est une section de $H$ et $(B,A)$ une section de $G$ telles qu'il existe un isomorphisme de groupes $f : B/A \to D/C$, alors*

$$L_{(D,C),f,(B,A)} = \left\{(h,g) \in H \times G \,\middle|\, h \in D, g \in B, hC = f(gA)\right\}$$

*est un sous-groupe de $H \times G$.*

*ii) Réciproquement, si $L$ est un sous-groupe de $H \times G$, alors il existe une unique section $(D,C)$ de $H$, une unique section $(B,A)$ de $G$ et un unique isomorphisme de groupes $f : B/A \to D/C$ tels que $L = L_{(D,C),f,(B,A)}$.*

**Lemme 2.9:** [Bou10, lemme 2.3.26, page 26-27]
*Soient $G$ et $H$ des groupes finis. Soient $(D,C)$ une section de $H$ et $(B,A)$ une section de $G$ telles qu'il existe un isomorphisme de groupes $f : B/A \to D/C$. On pose $L = L_{(D,C),f,(B,A)}$. Alors il existe un isomorphisme de $(H,G)$-bi-ensembles*

$$(H \times G)/L \cong \mathrm{Ind}_D^H \times_D \mathrm{Inf}_{D/C}^D \times_{D/C} \mathrm{Iso}(f) \times_{B/A} \mathrm{Def}_{B/A}^B \times_B \mathrm{Res}_B^G .$$

Ainsi tout bi-ensemble se décompose en une union disjointe de bi-ensembles transitifs $(H \times G)/L$ et ceux-ci se décomposent en un produit de Ind, Inf, Iso, Def et Res.

**Définition 2.10:** [Bou10, définition 2.4.9, page 30]
*Soient $G$ et $H$ deux groupes finis. Alors $B(H,G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de $(H,G)$-bi-ensembles finis (pour l'union disjointe).*

**Notation 2.11:** *En général, on notera* $\mathrm{Id}_G$ *pour l'image de* $\mathrm{Id}_G$ *dans $B(G,G)$ (au lieu de* $[\mathrm{Id}_G]$*). On fera de même pour* Ind*,* Inf*,* Res*,* Def *et* Iso*.*

**Remarque 2.12:** [Bou10, notation 2.4.10, page 30]
Soient $G, H$ et $K$ des groupes finis. Il existe une unique application bilinéaire

$$\times_H : B(K,H) \times B(H,G) \to B(K,G)$$

telle que $[V] \times_H [U] = [V \times_H U]$ pour tout $(H,G)$-bi-ensemble fini $U$ et pour tout $(K,H)$-bi-ensemble $V$. En particulier, cela munit $B(G,G)$ d'une structure naturelle d'anneau (grâce à la proposition suivante).

**Proposition 2.13:** [Bou10, proposition 2.4.11, page 30]
*Soient $G, H, K$ et $L$ des groupes finis.*

*i) Si $u \in B(H,G)$, $v \in B(K,H)$ et $w \in B(L,K)$, alors*

$$w \times_K (v \times_H u) = (w \times_K v) \times_H u \qquad \textit{dans } B(L,G).$$

*ii) Si $u, u' \in B(H,G)$ et $v, v' \in B(K,H)$, alors*

$$\begin{aligned} v \times_H (u + u') &= (v \times_H u) + (v \times_H u') \\ (v + v') \times_H u &= (v \times_H u) + (v' \times_H u) \qquad \textit{dans } B(K,G). \end{aligned}$$

*iii) Si $u \in B(H,G)$, alors*

$$[Id_H] \times_H u = u = u \times_G [Id_G] \qquad \textit{dans } B(H,G).$$

## 2.2 Foncteurs de bi-ensembles

Soit $R$ un anneau commutatif unitaire.

**Définition 2.14:** [Bou10, définition 3.1.1, page 41]
*La catégorie* $\underline{\mathrm{GrB}}$ *est définie comme suit :*

- *Les objets de* $\underline{\mathrm{GrB}}$ *sont les groupes finis.*
- *Si $G$ et $H$ sont des groupes finis, alors* $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{GrB}}}(G,H) = B(H,G)$.
- *Si $G$, $H$ et $K$ sont des groupes finis, alors la composition $v \circ u$ du morphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{GrB}}}(G,H)$ et du morphisme $v \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{GrB}}}(H,K)$ est égale à $v \times_H u$.*
- *Pour tout groupe fini $G$, le morphisme identité de $G$ dans $\underline{\mathrm{GrB}}$ est égal à* $[\mathrm{Id}_G]$.

Par la suite, on aimerait travailler sur le corps $\mathbb{C}$. Pour cela, on doit généraliser la définition précédente à un anneau :

**Définition 2.15:** [Bou10, définition 3.1.6, pages 42-43]
*Soit $R$ un anneau commutatif unitaire. La catégorie $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ est définie comme suit :*

- *Les objets de $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ sont les groupes finis.*
- *Si $G$ et $H$ sont des groupes finis, alors*

$$\mathrm{Hom}_{R\,\underline{\mathrm{GrB}}}(G,H) = RB(H,G) = R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H,G).$$

- *La composition de $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ est l'extension $R$-linéaire de la composition dans* $\underline{\mathrm{GrB}}$.
- *Pour tout groupe fini $G$, le morphisme identité de $G$ dans $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ est égal à* $1_R \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathrm{Id}_G]$.

**Remarque 2.16:** [Bou10, page 43]
La catégorie $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ est $R$-linéaire.

**Définition 2.17:** [Bou10, définition 3.2.2, page 43]
*Soit $R$ un anneau commutatif unitaire et soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pré-additive de la catégorie $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$ (alors on peut voir $R\mathcal{D}$ comme une sous-catégorie $R$-linéaire de $R\,\underline{\mathrm{GrB}}$). Un* ***foncteur de bi-ensembles*** *sur $\mathcal{D}$ à valeur dans* $R$-Mod *est un foncteur $R$-linéaire de $R\mathcal{D}$ dans* $R$-Mod. *Les foncteurs de bi-ensembles sur $\mathcal{D}$, à valeur dans* $R$-Mod *sont les objets de la catégorie noté par $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$, où les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs, et la composition de morphismes la composition de transformations naturelles.*

*Si $F$ est un objet non-nul de $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$, alors un* ***groupe minimal*** *pour $F$ est un objet $H$ de $\mathcal{D}$ tel que $F(H) \neq \{0\}$, mais $F(K) = \{0\}$ pour tout objet $K$ de $\mathcal{D}$ avec $|K| < |H|$. La classe des groupes minimaux de $F$ est notée par* $\mathrm{Min}(F)$ .

**Remarque 2.18:** Dans la définition ci-dessus, les foncteurs de bi-ensembles vont de $R\mathcal{D}$ dans $R$-Mod mais par la suite, je ne vais considérer que des foncteurs qui vont de $R\mathcal{D}$ dans $R$-mod (c'est-à-dire dans la catégorie des $R$-modules de génération finie). Par conséquent, à partir de maintenant, je fais l'hypothèse qu'un foncteur de bi-ensembles va toujours de $R\mathcal{D}$ dans $R$-mod.

**Remarque 2.19:** Si $F$ est un foncteur de bi-ensembles, alors les images des bi-ensembles Res, Ind, Inf, Def et Iso satisfont des relations analogues aux relations décrites dans la proposition 2.6.

**Proposition 2.20:** [Bou10, proposition 3.2.8, pages 44-45]
*Soit $R$ un anneau commutatif unitaire, et soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pré-additive de* $\underline{\mathrm{GrB}}$.

1. *La catégorie $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$ est une catégorie abélienne $R$-linéaire : si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de foncteurs de bi-ensembles, alors pour tout objet $G$ de $\mathcal{D}$*

$$(\mathrm{Ker}(f))(G) = \mathrm{Ker}(f(G)), \qquad (\mathrm{Coker}(f))(G) = \mathrm{Coker}(f(G)).$$

2. *Une suite $0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{f'} F'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$ si et seulement si pour tout objet $G$ de $\mathcal{D}$, la suite*

$$0 \longrightarrow F(G) \overset{f(G)}{\longrightarrow} F'(G) \overset{f'(G)}{\longrightarrow} F''(G) \longrightarrow 0$$

*est une suite exacte de $R$-modules.*

3. *Si $I$ est un ensemble et $(F_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$, alors la somme directe $\bigoplus_{i\in I} F_i$ et le produit direct $\prod_{i\in I} F_i$ existent : pour tout objet $G$ de $\mathcal{D}$*

$$\left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right)(G) = \bigoplus_{i\in I} F_i(G), \qquad \left(\prod_{i\in I} F_i\right)(G) = \prod_{i\in I} F_i(G).$$

**Remarque 2.21:** [Bou10, remarque 3.2.9, page 45]
Soit $F$ un objet de $\mathcal{F}_{R\mathcal{D},R}$. Si $(F_i)_{i\in I}$ est un ensemble de sous-foncteurs de $F$, alors l'intersection $\cap_{i\in I}F_i$ est un sous-foncteur de $F$ dont l'évaluation à un objet $G$ de $\mathcal{D}$ est égale à

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)(G) = \bigcap_{i\in I} F\,(G)\,.$$

En particulier, soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'objets de $\mathcal{D}$ et pour tout groupe $G$ dans $\mathcal{G}$, soit $\Gamma_G$ un sous-ensemble de $F(G)$. Le sous-foncteur $F_{\mathcal{G},\Gamma}$ de $F$ engendré par les données $(\mathcal{G},\Gamma)$ est, par définition, l'intersection de tous les sous-foncteurs $F'$ de $F$ tels que $\Gamma_G \subseteq F'(G)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$. Si $H$ est un objet de $\mathcal{D}$, alors

$$F_{\mathcal{G},\Gamma}(H) = \sum_{\substack{G\in\mathcal{G}\\ \gamma\in\Gamma_G}} \mathrm{Hom}_{R\mathcal{D}}(G,H)(\gamma).$$

**Définition 2.22:** [Bou10, définition 4.1.7, page 55]
*Une classe $\mathcal{D}$ de groupes finis est dite **fermée pour la prise de sous-quotients** si tout groupe isomorphe à un sous-quotient d'un élément de $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{D}$.*

*Une sous-catégorie $\mathcal{D}$ de* $\underline{\mathrm{GrB}}$ *est dite **replète** si c'est une sous-catégorie pleine dont la classe des objets est fermée pour la prise de sous-quotients.*

### 2.2.1 Le foncteur des modules de $p$-permutation

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

**Rappel 2.23:** Dans la définition 1.17, on a défini $\mathrm{pp}_k(G)$ comme le groupe de Grothendieck de l'ensemble des classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation. En particulier, c'est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et l'ensemble des $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables en est une base (remarque 1.18 et corollaire 1.22)

**Proposition 2.24:** *Soient $G$ et $H$ deux groupes finis et $U$ un $(H, G)$-bi-ensemble. Si $M$ est un $kG$-module de $p$-permutation, alors $kU \otimes_{kG} M$ est un $kH$-module de $p$-permutation.*

*Démonstration.* Comme $M$ est un $kG$-module de $p$-permutation, il existe un $kG$-module de permutation $kP$ ($P$ est un $G$-ensemble) et un $kG$-module $M'$ tels que $kP \cong M \oplus M'$. Mais alors :

$$(kU \otimes_{kG} M) \oplus (kU \otimes_{kG} M') \cong kU \otimes_{kG} (M \oplus M') \cong kU \otimes_{kG} kP \cong k(U \times_G P)$$

où $U \times_G P$ est un $H$-ensemble, c'est-à-dire que $k(U \times_G P)$ est un $kH$-module de permutation. Donc $kU \otimes_{kG} M$ est bien un $kH$-module de $p$-permutation. $\square$

**Définition 2.25:** *Soient $G$ et $H$ deux groupes finis et soit $U$ un $(H, G)$-bi-ensemble fini. Alors on pose*

$$\mathrm{pp}_k([U])([M]) = [kU \otimes_{kG} M]$$

*pour tout $kG$-module de $p$-permutation $M$. La proposition 2.24 nous assure que* $\mathrm{pp}_k([U])([M])$ *est un $kH$-module de $p$-permutation. Alors, par $\mathbb{Z}$-linéarité, on peut prolonger cette définition à $pp_k(G)$ et l'on obtient une application $\mathbb{Z}$-linéaire* $\mathrm{pp}_k([U]) : \mathrm{pp}_k(G) \longrightarrow \mathrm{pp}_k(H)$.

*Soit $u \in B(H, G)$. Alors $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [U_i]$, où $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ et $U_i$ est un $(H, G)$-bi-ensemble (transitif), pour tout $i = 1, \ldots, n$. Alors on définit* $\mathrm{pp}_k(u)$ *par :*

$$\mathrm{pp}_k(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathrm{pp}_k([U_i]) : \mathrm{pp}_k(G) \longrightarrow \mathrm{pp}_k(H).$$

**Théorème 2.26:** *La définition ci-dessus muni* $\mathrm{pp}_k$ *d'une structure de foncteur de bi-ensembles sur* $\mathbb{Z}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier c'est un foncteur $\mathbb{Z}$-linéaire. Par définition, $\mathrm{pp}_k(u)$ est $\mathbb{Z}$-linéaire, pour tout $u \in B(H, G)$. Clairement, $\mathrm{pp}_k(\mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{\mathrm{pp}_k(G)}$, pour tout groupe fini $G$. Il reste à vérifier que $\mathrm{pp}_k(u \times_H v) = \mathrm{pp}_k(u) \circ \mathrm{pp}_k(v)$ pour tout $u \in B(L, H)$ et pour tout $v \in B(H, G)$. Par $\mathbb{Z}$-linéarité, il est suffisant de le vérifier pour des bi-ensembles. Soient $U$ un $(L, H)$-bi-ensemble et $V$ un $(H, G)$-bi-ensemble. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{pp}_k([U] \times_H [V])([M]) &= \mathrm{pp}_k([U \times_H V])([M]) \\
&= [k(U \times_H V) \otimes_{kG} M] \\
&= [(kU \otimes_{kH} kV) \otimes_{kG} M] \\
&= [kU \otimes_{kH} (kV \otimes_{kG} M)] \\
&= \mathrm{pp}_k([U])([kV \otimes_{kG} M]) \\
&= \mathrm{pp}_k([U]) \circ \mathrm{pp}_k([V])([M])
\end{aligned}$$

pour tout $kG$-module $M$. Par $\mathbb{Z}$-linéarité, cela reste valable pour tout élément de $\mathrm{pp}_k(G)$ et par conséquent, $\mathrm{pp}_k([U] \times_H [V]) = \mathrm{pp}_k([U]) \circ \mathrm{pp}_k([V])$. $\square$

**Définition 2.27:** *Pour tout groupe fini $G$, on définit $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ par :*

$$\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{pp}_k(G).$$

*L'ensemble des $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ et donc $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (corollaire 1.22).*

*Pour tout $u \in B(H,G)$, on pose $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(u) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{pp}_k(u)$. Si $u \in \mathbb{C}B(H,G)$, alors $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $u_i \in B(H,G)$, pour tout $i = 1,\ldots,n$. On définit alors $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(u)$ par :*

$$\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(u_i) : \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) \longrightarrow \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(H).$$

**Théorème 2.28:** *La définition ci-dessus muni $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ d'une structure de foncteur de bi-ensembles sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du théorème 2.26. $\square$

## 2.3 Foncteurs simples et facteurs de composition

Soient $R$ un anneau commutatif avec élément identité et $\mathcal{D}$ une sous-catégorie replète de $\underline{\mathrm{GrB}}$. On pose $\mathcal{C} = R\mathcal{D}$

On va maintenant décrire les foncteurs simples pour la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C},R}$. Pour plus de détails : [Bou96] et [Bou10].

**Définition 2.29:** *Un foncteur est dit **simple** s'il est non-nul et ne possède pas d'autre sous-foncteur que lui-même et le foncteur nul.*

**Proposition 2.30:** [Bou10, proposition 4.2.2, page 56]
*Soit $\mathcal{E}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Alors si $F$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{C},R}$ et si $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F \neq 0$ (où $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ est la restriction du foncteur $F$ à la catégorie $\mathcal{E}$), alors $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ est un foncteur simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{E},R}$.*

Étant donné que toutes les catégories $\mathcal{D}$ que je vais considérer sont des sous-catégories pleines de $\underline{\mathrm{GrB}}$, cela implique que les foncteurs simples ne dépendent pas de la catégorie choisie.

**Définition 2.31:** [Bou10, exemple 3.3.5, page 49]
*Soient $G$ un objet de $\mathcal{C}$ et $V$ un $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$-module. On définit alors le foncteur de bi-ensembles $L_{G,V}$ par :*

- *Pour tout objet $H$ de $\mathcal{C}$, on pose*

$$L_{G,V}(H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G,H) \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)} V = RB(H,G) \otimes_{RB(G,G)} V.$$

- *Pour tout morphisme $\varphi : H \to H'$ dans $\mathcal{C}$, $L_{G,V}(\varphi) : L_{G,V}(H) \longrightarrow L_{G,V}(H')$ est défini par :*

$$\begin{aligned} L_{G,V}(\varphi) : L_{G,V}(H) &\longrightarrow L_{G,V}(H') \\ f \otimes v &\longmapsto (\varphi \circ f) \otimes v. \end{aligned}$$

*On peut remarquer que l'on a $L_{G,V}(G) \cong V$.*

**Proposition 2.32:** [Bou10, corollaire 4.2.4, page 58]
*Soient $G$ un objet de $\mathcal{C}$ et $V$ un $End_{\mathcal{C}}(G)$-module simple. Alors le foncteur $L_{G,V}$ a un unique sous-foncteur propre maximal $J_{G,V}$ et le quotient $S_{G,V} = L_{G,V}/J_{G,V}$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{C},R}$, tel que $S_{G,V}(G) \cong V$.*

**Remarque 2.33:** [Bou10, remarque 4.2.6, page 58]
Soit $H$ un objet de $\mathcal{C}$. Alors $J_{G,V}(H)$ est égal à l'ensemble des sommes finies $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes v_i \in L_{G,V}(H)$, où $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G,H)$ et $v_i \in V$, telles que $\sum_{i=1}^{n}(\psi \circ \varphi_i) \cdot v_i = 0$ pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H,G)$, où $(\psi \circ \varphi_i) \cdot v_i$ dénote l'image de l'élément $v_i$ de $V$ sous l'action de l'endomorphisme $\phi \circ \varphi_i$ de $G$.

**Proposition 2.34:** [Bou10, proposition 4.3.2, page 58]
*Si $G$ est un objet de $\mathcal{C}$, on dénote par $I_G$ le $R$-sous-module de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$ engendré par tous les endomorphismes de $G$ qui peuvent être factorisés par un objet $H$ de $\mathcal{C}$ avec $|H| < |G|$. Alors $I_G$ est un idéal bilatère de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$, et on a la décomposition*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G) = A_G \oplus I_G,$$

*où $A_G$ est une $R$-sous-algèbre, isomorphe à l'algèbre de groupe $R\,\mathrm{Out}(G)$ du groupe des automorphismes extérieurs de $G$.*

Soit $F$ un foncteur simple et soit $G$ un élément de $\min(F)$ (unique à isomorphisme près car $F$ est simple). Alors $F$ est isomorphe au foncteur simple $S_{G,F(G)}$. De plus, on peut montrer que $I_G$ agit trivialement sur $F(G)$ donc que l'on peut considérer $F(G)$ comme un $R\,\mathrm{Out}(G)$-module. Réciproquement, si $V$ est un $R\,\mathrm{Out}(G)$-module simple, $V$ devient un $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$-module simple via l'homomorphisme d'algèbres $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G) \longrightarrow A_G$. Par abus de notation, ce module sera aussi noté $V$. Ainsi, les objets simples de $\mathcal{F}_{\mathcal{C},R}$ sont indicés par les paires $(G,V)$, où $G$ est un groupe fini et $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple. On peut définir une notion d'isomorphisme sur ces paires telle que deux foncteurs simples sont isomorphes si et seulement si les paires correspondantes sont isomorphes ([Bou10], théorème 4.3.10, page 62).

**Proposition 2.35:** [Bou10, lemme 4.3.9, page 61]
*Soient $G$ un groupe fini et $V$ un $R\,\mathrm{Out}(G)$-module simple. Si $H$ est un groupe fini tel que $S_{G,V}(H) \neq \{0\}$, alors $G$ est isomorphe à un sous-quotient de $H$.*

**Corollaire 2.36:** *Soient $G$ un groupe fini et $V$ un $R\,\mathrm{Out}(G)$-module simple. Alors $G$ est un groupe minimal de $S_{G,V}$ et $\min(S_{G,V})$ est la classe d'isomorphisme de $G$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence de la proposition précédente. $\square$

**Définition 2.37:** *Soit $F$ un foncteur de bi-ensemble sur $\mathcal{C}$. Alors un foncteur simple $S$ est un* ***facteur de composition*** *de $F$ s'il existe des sous-foncteurs $F' \subseteq F'' \subseteq F$ tels que $F''/F' \cong S$.*

**Définition 2.38:** *Soit $G$ un objet de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $\mathcal{C}{\downarrow_G}$ comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les sous-quotients de $G$.*

**Définition 2.39:** [Web93, page 20]
*Soient $G$ un objet de $\mathcal{C}$ fixé et $F$ un foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}$. Le foncteur $F$ a une* ***suite de composition sur*** *$G$ s'il existe une suite de sous-foncteurs*

$$0 = T_0 \subseteq B_1 \subset T_1 \subseteq \ldots \subseteq B_m \subset T_m \subseteq B_{m+1} = F$$

*telle que*

- *$T_i/B_i$ est un foncteur simple, dont la restriction à $\mathcal{C}{\downarrow_G}$ est non-nulle pour tout $i = 1, \ldots, m$.*
- *$\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}\downarrow_G}(B_{i+1}/T_i) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots m$.*

*Si une telle suite de composition existe, on appelle l'ensemble des foncteurs simples $T_i/B_i$ avec leur multiplicité les* ***facteurs de composition de*** *$F$* ***sur*** *$G$ .*

**Remarque 2.40:** Les facteurs de composition de $F$ sur $G$ correspondent exactement aux facteurs de composition de $F$ qui sont non-nuls sur $G$. En particulier, cela permet d'avoir une notion de multiplicité pour les facteurs de composition (grâce à la proposition et au théorème qui suivent).

**Proposition 2.41:** [Web93, proposition 3.1, page 20]
*Soient $G$ un objet de $\mathcal{C}$ fixé et $F$ un foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}$. Si $F$ possède une suite de composition sur $G$, alors toute autre suite de composition de $F$ sur $G$ a la même longueur et les facteurs de composition sur $G$ (avec leur multiplicité) sont les mêmes.*

**Théorème 2.42:** *On suppose que $R$ est un corps. Alors, tout foncteur de bi-ensembles de $\mathcal{C}$ possède une suite de composition sur $G$, pour tout groupe $G$ dans $\mathcal{C}$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.3, page 22 de [Web93]. Pour ce théorème, on a besoin de la remarque 2.18, c'est-à-dire que $F(G)$ est de dimension finie pour tout objet $G$ de $\mathcal{C}$. □

Soient $\mathcal{E}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ et $F$ un foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}$. Alors $F$ est aussi un foncteur de bi-ensembles sur la catégorie $\mathcal{E}$, noté $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$. Quels sont les liens entre les facteurs de composition de $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ sur $\mathcal{E}$ et ceux de $F$ sur $\mathcal{C}$ ?

**Proposition 2.43:** *Soient $G$ un objet de $\mathcal{C}$ et $V$ un $R\,\mathrm{Out}(G)$-module simple. Si $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ sur $\mathcal{E}$, alors $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $F$ sur $\mathcal{C}$.*

*Démonstration.* Soient $\widetilde{F}_2 \subset \widetilde{F}_1 \subset \mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ des sous-foncteurs de $\mathrm{Res}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} F$ dans $\mathcal{E}$ tels que $\widetilde{F}_1/\widetilde{F}_2$ est un foncteur simple (isomorphe à $S_{G,V}$). On doit alors trouver des foncteurs $F_2 \subset F_1 \subset F$ dans $\mathcal{C}$ tels que $F_1/F_2 \cong S_{G,V}$.

Soit $F_i$ le foncteur engendré par $(\mathcal{E}, \widetilde{F_i})$ sur la catégorie $\mathcal{C}$. On a alors $F_2 \subseteq F_1 \subseteq F$ et de plus $F_i(H) = \widetilde{F}_i(H)$ pour tout objet $H$ de $\mathcal{E}$. Alors on a

$$L_{G,V}(G) = V = S_{G,V}(G) \cong \widetilde{F}_1(G)/\widetilde{F}_2(G) = F_1(G)/F_2(G).$$

Donc on a une application de $L_{G,V}(G)$ vers $(F_1/F_2)(G)$.

Le foncteur $V \longmapsto L_{G,V}$ est un adjoint à gauche du foncteur d'évaluation $Ev_G : \mathcal{F}_{\mathcal{C},R} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$-Mod. Ainsi, comme on a une application non-nulle de $L_{G,V}(G)$ vers $(F_1/F_2)(G)$, cela implique qu'il existe une transformation naturelle $\varphi : L_{G,V} \to F_1/F_2$. On considère alors $\varphi(L_{G,V})$ et $\varphi(J_{G,V})$. Ce sont des sous-foncteurs de $F_1/F_2$, dont le quotient est simple et isomorphe à $S_{G,V}$. Mais alors il existe des foncteurs $F_2 \subseteq F'' \subseteq F' \subseteq F_1$ tels que $F'/F_2$ et $F''/F_2$ correspondent à $\varphi(L_{G,V})$ et $\varphi(J_{G,V})$ respectivement. On a alors $F'' \subseteq F' \subseteq F$ et $F'/F''$ est le foncteur simple $S_{G,V}$. □

**Définition 2.44:** *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors on définit $\mathcal{D}_n$ comme la sous-catégorie pleine de* <u>GrB</u> *dont les objets sont les groupes finis d'ordre plus petit ou égal à $n$. On définit $\mathcal{C}_n$ comme étant $R\mathcal{D}_n$.*

**Proposition 2.45:** *On suppose que $R$ est un corps. Soit $F$ un foncteur de bi-ensembles sur la catégorie $\mathcal{C}_n$. Alors $F$ possède une suite de sous-foncteurs*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{t-1} \subset F_t = F$$

*telle que $F_i/F_{i-1}$ est un foncteur simple pour tout $i = 1, \ldots t$.*

**Remarque 2.46:** Pour cette proposition, il est nécessaire de supposer que $F(G)$ est de dimension finie, pour tout objet $G$ de $\mathcal{C}_n$ (remarque 2.18).

*Démonstration.* Soit $E$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des groupes finis d'ordre plus petit ou égal à $n$. Il y a, à isomorphisme près qu'un nombre fini de groupes finis d'ordre $\leq n$ donc $E$ est fini. On va montrer par récurrence sur

$$m = \sum_{G \in E} \dim_{\mathbb{C}} F(G)$$

que $F$ possède une suite finie de sous-foncteurs sur $\mathcal{C}_n$ dont les quotients successifs sont simples.

Si $m = 0$, alors $F$ est le foncteur nul et le résultat est vérifié.

Si $m = 1$, alors $\dim_{\mathbb{C}} F(H) = 1$ pour un certain groupe $H$ de $\mathcal{C}_n$ et $F(G) = 0$ si $G \neq H$. Alors clairement $F$ doit être un foncteur simple (isomorphe à $S_{H,F(H)}$) et le résultat est donc vrai pour $m = 1$.

Soit $m > 1$. On suppose maintenant que le résultat vrai pour tout foncteur $F$ tel que $\sum_{G \in E} \dim_{\mathbb{C}} F(G) < m$. Soit $F$ un foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}_n$ tel que $\sum_{G \in E} \dim_{\mathbb{C}} F(G) = m$.

Soit $F$ est simple et dans ce cas, on a terminé, soit il existe un sous-foncteur $0 \subsetneq F' \subsetneq F$ de $F$. Mais alors $F'$ et $F/F'$ satisfont l'hypothèse de récurrence. Donc il existe des suites

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots \subset F_s = F'$$

et

$$0 = H'_0 \subset H'_1 \subset H'_2 \subset H'_3 \subset \ldots \subset H'_r = F/F'$$

dont les quotients successifs sont simples. On peut alors remonter les foncteurs $H'_i$ et on obtient la suite suivante :

$$F' = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots \subset H_r = F.$$

Il faut prouver que les quotients successifs sont simples. Soit $1 \leq l \leq r$. Il existe les transformations naturelles suivantes :

$$H_l \longrightarrow H'_l = H_l/F' \longrightarrow H'_l/H'_{l-1}.$$

On peut remarquer que cela induit une transformation naturelle de $H_l/H_{l-1}$ vers $H'_l/H'_{l-1}$. De fait, c'est un isomorphisme naturel, ce qui prouve que les quotients successifs sont bien simples. Ainsi on a la suite de foncteurs

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_s = F' = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_r = F$$

dont les quotients successifs sont simples. $\square$

**Remarque 2.47:** Le théorème ci-dessus implique que $F$ possède une suite de composition sur $G$ avec $B_{i+1} = T_i$ (avec les notations de la définition 2.39), pour tout groupe fini $G$ d'ordre plus petit ou égal à $n$.

## 2.4 Le foncteur de Burnside

Soient $\mathcal{D}$ une sous-catégorie replète de $\underline{\mathrm{GrB}}$ et $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathbb{C}\mathcal{D}$.

**Définition 2.48:** *De manière analogue au foncteur des modules de p-permutation (section 2.2.1), on va définir le foncteur de Burnside.*

*Soit $G$ un groupe fini. Alors $B(G)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme des $G$-ensembles finis (pour l'union disjointe). C'est un $\mathbb{Z}$-module de génération finie car l'ensemble $\{[G/K] \mid K \leq_G G\}$ est une base de $B(G)$.*

*De plus, $B(G)$ est un anneau (appelé* ***anneau de Burnside de*** *$G$), où la multiplication est définie par :*

$$[U] \cdot [V] = [U \times V]$$

*pour tous $G$-ensembles finis $U$ et $V$ (étendu à $B(G)$ par linéarité).*

*Soient $G$ et $H$ deux groupes finis et soit $U$ un $(H,G)$-bi-ensemble fini. Alors on pose*

$$B([U])([V]) = [U \times_G V]$$

*pour tout $G$-ensemble fini $V$. Cela induit, par $\mathbb{Z}$-linéarité, une application $\mathbb{Z}$-linéaire $B([U]) : B(G) \longrightarrow B(H)$. Comme pour $\mathrm{pp}_k$, on peut alors définir $B(u)$ pour tout $u \in B(H,G)$ et $B$ est alors un foncteur de bi-ensembles sur $\mathbb{Z}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

*Comme dans la définition 2.27, on peut alors définir un foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}B$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. Par restriction, cela définit aussi un foncteur sur la catégorie $\mathcal{C}$. C'est ce foncteur que l'on va étudier dans ce chapitre.*

**Remarque 2.49:** Une manière plus simple de définir le foncteur de bi-ensemble $\mathbb{C}B$ est de dire que c'est le foncteur représentable $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}}(\mathbf{1}, -)$ de la catégorie $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.

Si $G$ est un groupe fini, alors $\{[G/K] \mid K \leq_G G\}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}B(G)$. Mais pour la suite, on va utiliser une autre base, qui est la suivante :

**Théorème 2.50:** [Glu81, Gluck],[Yos83, Yoshida]
*Soit $G$ un groupe fini. Si $H$ est un sous-groupe de $G$, on dénote par $e_H^G$ l'élément de $\mathbb{C}B(G)$ défini par*

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K|\mu(K,H)[G/K],$$

*où $\mu$ est la fonction de Möbius de l'ensemble partiellement ordonné des sous-groupes de $G$.*

*Alors $e_H^G = e_K^G$ si les sous-groupes $H$ et $K$ sont conjugués dans $G$, et les éléments $e_H^G$, où $H$ parcourt les sous-groupes de $G$ à conjugaison près, sont les idempotents primitifs de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}B(G)$.*

En particulier, $\{e_H^G \mid H \leq_G G\}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}B(G)$.

**Définition 2.51:** [Bou10, notation 5.2.2, définition 5.4.6, définition et notation 5.4.13, pages 77, 85 et 88]
*Soit $G$ un groupe fini. Si $N$ est un sous-groupe normal de $G$, on définit le nombre $m_{G,N}$ par*

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{XN=G} |X|\mu(X,G) \in \mathbb{Q},$$

*où $\mu$ est la fonction de Möbius de l'ensemble partiellement ordonné des sous-groupes de $G$.*

*Un groupe fini $G$ est un $B$-**groupe** si pour tout sous-groupe normal non-trivial $N$ de $G$, $m_{G,N} = 0$.*

*On dénote par* B-gr$(\mathcal{C})$ *la classe de tous les $B$-groupes finis dans $\mathcal{C}$ et par* [B-gr$(\mathcal{C})$] *un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de $B$-groupes finis dans $\mathcal{C}$.*

*Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de* [B-gr$(\mathcal{C})$] *est dit **fermé** si pour tout $G \in \mathcal{A}$ et pour tout $H \in$* [B-gr$(\mathcal{C})$] *avec $H \gg G$, on a $H \in \mathcal{A}$.*

**Remarque 2.52:** La définition de $B$-groupe ci-dessus correspond à la définition de $B$-groupe en caractéristique 0 dans [Bou10].

**Remarque 2.53:** [Bou10, exemple 5.2.3, page 77]
Soit $G$ un groupe fini. On a $m_{G,N} = m_{G,N\Phi(G)}$, pour tout sous-groupe normal $N$ de $G$. En particulier, on a $m_{G,\Phi(G)} = m_{G,\mathbf{1}} = 1$. Cela implique que si $G$ est un $B$-groupe, alors le sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ de $G$ est trivial.

**Définition 2.54:** [Bou10, proposition 5.4.10, page 86 et théorème 5.4.11, page 87]
*Soit $G$ un groupe fini. Alors $\beta(G)$ est définie comme un quotient $G/N$ de $G$, où $N$ est un sous-groupe normal de $G$ tel que $m_{G,N} \neq 0$ et $G/N$ est un $B$-groupe.*

**Remarque 2.55:** Dans la définition ci-dessus, $\beta(G)$ est bien défini, à isomorphisme de groupes près. Par contre, le sous-groupe normal $N$ n'est en général pas unique.

**Notation 2.56:** [Bou10, notation 5.4.3, page 84]
*Soit $G$ un groupe fini. Alors $\mathbf{e}_G$ est le sous-foncteur de $\mathbb{C}B$ engendré par $e_G^G \in \mathbb{C}B(G)$.*

**Remarque 2.57:** [Bou10, remarque 5.4.4, page 84]
Avec les notations de la remarque 2.21, l'ensemble $\mathcal{G}$ est égal à $\{G\}$ et $\Gamma_G = \{e_G^G\}$.

**Théorème 2.58:** [Bou10, proposition 5.5.1, page 89]

1. *Soit $G$ un $B$-groupe fini. Alors le sous-foncteur $\mathbf{e}_G$ de $\mathbb{C}B$ possède un unique sous-foncteur maximal :*
$$\mathbf{j}_G = \sum_{\substack{H \in [\text{B-gr}(\mathcal{C})] \\ H \gg G, H \not\cong G}} \mathbf{e}_H,$$
*et le quotient $\mathbf{e}_G/\mathbf{j}_G$ est isomorphe au foncteur simple $S_{G,\mathbb{C}}$.*
2. *Si $F \subseteq F'$ sont des sous-foncteurs de $\mathbb{C}B$ tels que le foncteur $F'/F$ est simple, alors il existe un unique $G \in [\text{B-gr}(\mathcal{C})]$ tel que $\mathbf{e}_G \subseteq F'$ et $\mathbf{e}_G \not\subseteq F$. En particulier, $\mathbf{e}_G + F = F'$, $\mathbf{e}_G \cap F = \mathbf{j}_G$, et $F'/F \cong S_{G,\mathbb{C}}$.*

**Remarque 2.59:** [Bou10, remarque 5.5.2, page 90]
Les facteurs de composition du foncteur de Burnside $\mathbb{C}B$ sur $\mathcal{C}$ sont exactement les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ est un objet de $\mathcal{C}$ qui est un $B$-groupe.

**Théorème 2.60:** *Il existe un isomorphisme entre l'ensemble partiellement ordonné des sous-foncteurs de $\mathbb{C}B$ (sur $\mathcal{C}$) et l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles fermés de* $[\text{B-gr}(\mathcal{C})]$.

*Démonstration.* Cette bijection est une conséquence du théorème 5.4.14 (page 88) et de la proposition 5.5.3 (page 90) de [Bou10]. □

Voici une description de cette bijection : Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble fermé de $[\text{B-gr}(\mathcal{C})]$. On veut définir le sous-foncteur $F_{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{C}B$ associé à cet ensemble. On définit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ par :
$$\mathcal{B} = \left\{G \in \mathcal{C} \,\middle|\, \beta(G) \in \mathcal{A}\right\} = \left\{G \in \mathcal{C} \,\middle|\, \exists\, H \in \mathcal{A}, G \gg H\right\}.$$
Alors, pour tout groupe fini $G$, on a
$$F_{\mathcal{A}}(G) = \bigoplus_{\substack{H \leq_G G \\ H \in \mathcal{B}}} \mathbb{C}e_H^G = \bigoplus_{\substack{H \leq_G G \\ \beta(H) \in \mathcal{A}}} \mathbb{C}e_H^G.$$
Plus précisément, l'ensemble $\{e_H^G \,|\, H \leq_G G, H \in \mathcal{B}\} = \{e_H^G \,|\, H \leq_G G, \beta(H) \in \mathcal{A}\}$ est une $\mathbb{C}$-base de $F_{\mathcal{A}}(G)$.

Réciproquement, si $F$ est un sous-foncteur de $\mathbb{C}B$, on définit le sous-ensemble fermé $\mathcal{A}$ de $[\text{B-gr}(\mathcal{C})]$ associé par :
$$\mathcal{A} = \{H \in [\text{B-gr}(\mathcal{C})] \,|\, e_H^H \in F(H)\}.$$

## 2.5 Le foncteur des représentations ordinaires

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p$. Soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de <u>GrB</u> dont les objets sont les $p'$-groupes finis. On note $\mathcal{C} = \mathbb{C}\mathcal{D}$.

**Notation 2.61:** [Bou10, notation 7.1.1, page 121]
*Soit $G$ un $p'$-groupe fini. On dénote par $R_k(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $kG$-modules de dimension finie (par rapport aux suites exactes). C'est un $\mathbb{Z}$-module de génération finie.*

*Si $H$ est un autre $p'$-groupe fini et $U$ est un $(H,G)$-bi-ensemble, on dénote par $R_k([U]) : R_k(G) \to R_k(H)$ l'homomorphisme de groupes défini par :*

$$R_k([U])([E]) = [kU \otimes_{kG} E],$$

*pour tout $kG$-module $E$. On peut alors, par $\mathbb{Z}$-linéarité, étendre cette définition à $R_k(G)$.*

Comme pour $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (section 2.2.1), cette construction peut être étendue par linéarité : Pour tout élément $u \in B(H,G)$, cela donne un homomorphisme de groupes $R_k(u) : R_k(G) \to R_k(H)$, et cela muni la correspondance $G \mapsto R_k(G)$ d'une structure de foncteur de bi-ensembles (sur $\mathbb{Z}$), noté $R_k$ . Soit $kR_k = k \otimes_{\mathbb{Z}} R_k$ le foncteur de bi-ensembles sur $k\mathcal{D}$ obtenu par extension $k$-linéaire du foncteur $R_k$. De fait, on peut aussi faire de la même manière une extension des scalaires sur un autre corps, en particulier sur $\mathbb{C}$ : Soit $\mathbb{C}R_k$ le foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}$ obtenu par extension $\mathbb{C}$-linéaire du foncteur $R_k$.

**Remarques 2.62:**

1. Soient $G$ un $p'$-groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Si $M$ est un $kG$-module, alors c'est aussi un $kH$-module, noté $\mathrm{Res}^G_H M$.
2. Soient $G$ un $p'$-groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Si $M$ est un $kH$-module, alors on peut définir un $kG$-module $\mathrm{Ind}^G_H M$ par $\mathrm{Ind}^G_H M = kG \otimes_{kH} M$.
3. Soient $G$ un $p'$-groupe fini et $N$ un sous-groupe normal de $G$. Alors si $M$ est un $k[G/N]$-module, on peut définir un $kG$-module, que l'on note $\mathrm{Inf}^G_H M$.
4. Soient $G$ un $p'$-groupe fini et $N$ un sous-groupe normal de $G$. Alors si $M$ est un $kG$-module, l'ensemble des points cofixes
$$M_N = {}^{M}/\langle n \cdot m - m | m \in M, n \in N\rangle$$
est un $k[G/N]$-module, noté $\mathrm{Def}^G_{G/N} M$.
5. Soit $f : G \to H$ un isomorphisme de $p'$-groupes finis. Si $M$ est un $kG$-module, alors, via $f$, c'est aussi un $kH$-module, noté $\mathrm{Iso}(f)M = \mathrm{Iso}^H_G M$.
6. Pour chaque cas ci-dessus, cela correspond de fait à appliquer $R_k(U)$ à $M$, où $U$ est le bi-ensemble du même nom, ce qui explique les noms donnés à ces bi-ensembles. Par exemple, $\mathrm{Res}^G_H M = R_k(\mathrm{Res}^G_H)(M)$. En particulier, cela implique qu'ils safisfont des relations analogues à celle de la proposition 2.6 (remarque 2.19).
7. Les notions définies ci-dessus peuvent facilement être généralisées à un groupe fini quelconque. La seule contrainte est que l'ordre de $N$ doit être premier à $p$ pour la déflation.

**Définition 2.63:** [Bou10, définition 7.3.1, page 130]
*Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Un caractère $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to k^\star$ est* ***primitif*** *s'il ne peut pas être factorisé par un sous-quotient propre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$, c'est-à-dire que si $n|m$ et $Ker\pi_{m,n} \leq \mathrm{Ker}\,\xi$ alors cela implique que $n = m$ (où $\pi_{m,n} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ est la projection naturelle).*

**Théorème 2.64:** [Bou10, corollaire 7.3.5, page 133]
*On suppose que $k$ est un corps de caractéristique 0. Alors le foncteur $kR_k$ est un objet semi-simple de la catégorie $\mathcal{F}_{k\,\underline{\mathrm{GrB}},k}$. Plus précisément,*

$$kR_k \cong \bigoplus_{(m,\xi)} S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},k_\xi},$$

*où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to k^\star$ et où $k_\xi$ est l'espace vectoriel $k$ sur lequel le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ agit via $\xi$.*

On suppose maintenant que $p \neq 0$. On va déterminer les facteurs de composition de $\mathbb{C}R_k$ sur la catégorie $\mathcal{C}$.

Il existe un anneau de valuation discrète complet $A$ de caractéristique 0 tel que $k = A/m$ où $m$ est l'unique idéal maximal de $A$ ([Thé95], exemple 2.2 b), page 13). Soit $K$ le corps de fraction de $A$. C'est un corps de caractéristique 0. Alors, si $G$ est un $p'$-groupe fini, on a

$$\mathbb{C}R_k(G) \cong \mathbb{C}R_K(G) \cong \mathbb{C}R_{\overline{\mathbb{Q}}}(G) \cong \mathbb{C}R_{\mathbb{C}}(G).$$

De fait, on a même que les foncteurs de bi-ensembles $\mathbb{C}R_k$ et $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ sont isomorphes sur la catégorie $\mathcal{C}$.

**Théorème 2.65:** *Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P}$. Le foncteur $\mathbb{C}R_k$ est un objet semi-simple de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{C},k}$. Plus précisément,*

$$\mathbb{C}R_k \cong \bigoplus_{(m,\xi)} S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{C}_\xi},$$

*où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que c'est vrai pour le foncteur $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$. On applique le théorème 2.64 à $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$ puis on se restreint à $\mathcal{C}$. Soient $m$ un entier positif, $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$ un caractère primitif et $H$ un objet de $\mathcal{C}$ tels que $S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},k_\xi}(H) \neq 0$. Alors $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un sous-quotient de $H$ (proposition 2.35) et donc $m$ est premier à $p$, ce qui termine la preuve. □

## 2.6 Quelques résultats sur la dimension

Voici quelques résultats qui nous seront utiles par la suite :

**Théorème 2.66:** [Bou10, théorème 5.5.4, page 91]
*Soit $G$ un $B$-groupe fini. Si $H$ est un groupe fini, alors $\dim_{\mathbb{C}} S_{G,\mathbb{C}}(H)$ est égale au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes $K$ de $H$ tels que $\beta(K) \cong G$.*

**Théorème 2.67:** [Bou10, corollaire 7.4.3, page 134]
*Soient $G$ un groupe fini, $m$ un nombre entier strictement positif et $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$ un caractère primitif. La dimension de $S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{C}_\xi}(G)$ est égale au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques $H$ de $G$ d'ordre multiple de $m$, pour lesquelles l'image naturelle dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ de l'action de $N_G(H)$ sur $H$ est contenue dans le noyau de $\xi$.*

**Corollaire 2.68:** *Soit $G$ un groupe fini. Alors* $\dim_{\mathbb{C}} S_{1,\mathbb{C}}(G)$ *est égale au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de $G$.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier du théorème 2.67 en utilisant le fait que $\beta(G) = \mathbf{1}$ si et seulement si $G$ est cyclique ([Bou10], remarque 5.6.2, page 92). $\square$

**Remarque 2.69:** La proposition 4.4.6 et la remarque 4.4.7, page 71 de [Bou10] contiennent un résultat sur la dimension des foncteurs simples $S_{G,k}$, où $G$ est groupe fini et $k$ le $k\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial. Un résultat encore plus général se trouve dans l'article [BST].

## 2.7 Le produit de foncteurs

Soit $k$ un corps algébriquement clos. Soit $\pi$ un ensemble de nombres premiers. Soit $\mathcal{P}$ une sous-catégorie replète de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont des $\pi$-groupes finis et soit $\mathcal{Q}$ une sous-catégorie replète de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont des $\pi'$-groupes finis. Soit de plus $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ la sous-catégorie pleine de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les groupes de la forme $P \times Q$ où $P$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $Q$ un objet de $\mathcal{Q}$. C'est aussi une catégorie replète.

Soient $F_{\mathcal{P}}$ un foncteur de bi-ensembles sur la catégorie $\mathcal{P}$ et $F_{\mathcal{Q}}$ un foncteur de bi-ensembles sur la catégorie $\mathcal{Q}$. On veut construire un foncteur de bi-ensembles $F$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ tel que la restriction de $F$ à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ correspond à $F_{\mathcal{P}}$ et $F_{\mathcal{Q}}$ respectivement.

On va commencer par définir $F$ sur les objets de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ : Soit $G = P \times Q$ où $P$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $Q$ un objet de $\mathcal{Q}$. On pose

$$F(G) = F_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q).$$

Comme $F_{\mathcal{P}}(P)$ et $F_{\mathcal{Q}}(Q)$ sont des $k$-espaces vectoriels de dimension finie, $F(G)$ est aussi un $k$-espace vectoriel de dimension finie.

Il faut maintenant définir ce que vaut $F(\mu)$ si $\mu$ est un élément de $kB(H,G)$ (où $P$ et $P'$ sont des objets de $\mathcal{P}$ et $Q$ et $Q'$ des objets de $\mathcal{Q}$ tels que $G = P \times Q$ et $H = P' \times Q'$). Pour cela, on va avoir besoin de la proposition suivante :

**Proposition 2.70:** *Soient $G$ et $H$ des groupes finis. Si $U$ est un $(G, G')$-bi-ensemble et $V$ est un $(H, H')$-bi-ensemble, alors $U \times V$ est un $(G \times H, G' \times H')$-bi-ensemble avec l'action suivante :*

$$(g, h) \cdot (u, v) \cdot (g', h') = (gxg', hyh'),$$

*pour tout $g \in G$, pour tout $g' \in G'$, pour tout $h \in H$, pour tout $h' \in H'$, pour tout $u \in U$ et pour tout $v \in V$. La correspondance $(U, V) \longmapsto U \times V$ induit une application bilinéaire de $B(G, G') \times B(H, H')$ dans $B(G \times H, G' \times H')$ et donc une application linéaire*

$$\varepsilon : B(G, G') \otimes_{\mathbb{Z}} B(H, H') \longrightarrow B(G \times H, G' \times H'),$$

*qui est un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules injectif qui préserve les éléments identités. Si $G \times G'$ et $H \times H'$ sont d'ordre premiers entre eux, cette application est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Le fait que la correspondance induise une application bilinéaire est le lemme 8.1.2, page 135 de [Bou10]. Pour le reste, c'est une généralisation de la proposition 2.5.14 b), pages 38-39 de [Bou10]. La preuve est analogue. $\square$

**Remarque 2.71:** La proposition précédente reste valable si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $k$. On obtient alors un homomorphisme de $k$-espaces vectoriels

$$\varepsilon : kB(G,G') \otimes_k kB(H,H') \longrightarrow kB(G\times H, G'\times H')$$

qui devient un isomorphisme si $G\times G'$ et $H\times H'$ sont d'ordre premiers entre eux. Si de plus $G=G'$ et $H=H'$, alors cela devient un isomorphisme de $k$-algèbres.

Soient $G=P\times Q$ et $H=P'\times Q'$, où $P$ et $P'$ sont des objets de $\mathcal{P}$, $Q$ et $Q'$ des objets de $\mathcal{Q}$ et soit $u$ un élément de $kB(P\times Q, P'\times Q')$. Alors on définit $F(u) : F(G) \longrightarrow F(H)$ comme étant l'application

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_{\mathcal{P}}(u_{\mathcal{P},i}) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(u_{\mathcal{Q},i}) : F_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q) \longrightarrow F_{\mathcal{P}}(P') \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q'),$$

où $\varepsilon^{-1}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{\mathcal{P},i} \otimes_k u_{\mathcal{Q},i}$, avec $u_{\mathcal{P},i} \in kB(P,P')$ et $u_{\mathcal{Q},i} \in kB(Q,Q')$, pour tout $i=1,\ldots,n$.

**Proposition 2.72:** *Ainsi défini, $F$ est un foncteur de bi-ensembles.*

*Démonstration.* Étant donnée que $\varepsilon$ préserve les éléments identités, il est facile de vérifier que $F(\mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{F(G)}$ pour tout objet $G$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

Il reste à vérifier que $F(u_1 \circ u_2) = F(u_1) \circ F(u_2)$ pour tout $u_1 \in kB(P''\times Q'', P'\times Q')$ et pour tout $u_2 \in kB(P'\times Q', P\times Q)$. Par $k$-linéarité, il suffit de vérifier que c'est le cas pour des bi-ensembles transitifs. Soient $P$, $P'$ et $P''$ des objets de $\mathcal{P}$, $Q$, $Q'$ et $Q''$ des objets de $\mathcal{Q}$, $U$ un $(P''\times Q'', P'\times Q')$-bi-ensemble transitif et $V$ un $(P'\times Q', P\times Q)$-bi-ensemble transitif. Alors, par la proposition 2.70, il existe un $(P'',P')$-bi-ensemble $U_{\mathcal{P}}$, un $(P',P)$-bi-ensemble $V_{\mathcal{P}}$, un $(Q'',Q')$-bi-ensemble $U_{\mathcal{Q}}$ et un $(Q',Q)$-bi-ensemble $V_{\mathcal{Q}}$ tels que :

$$U = U_{\mathcal{P}} \times U_{\mathcal{Q}} \text{ et } V = V_{\mathcal{P}} \times V_{\mathcal{Q}}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
F([U]) \circ F([V]) &= \left(F_{\mathcal{P}}\left([U_{\mathcal{P}}]\right) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}\left([U_{\mathcal{Q}}]\right)\right) \circ \left(F_{\mathcal{P}}([V_{\mathcal{P}}]) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}([V_{\mathcal{Q}}])\right) \\
&= \left(F_{\mathcal{P}}([U_{\mathcal{P}}]) \circ F_{\mathcal{P}}([V_{\mathcal{P}}])\right) \otimes_k \left(F_{\mathcal{Q}}([U_{\mathcal{Q}}]) \circ F_{\mathcal{Q}}([V_{\mathcal{Q}}])\right) \\
&= F_{\mathcal{P}}([U_{\mathcal{P}} \times_{P'} V_{\mathcal{P}}]) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}([U_{\mathcal{Q}} \times_{Q'} V_{\mathcal{Q}}]) \\
&= F([U \times_{P'\times Q'} V])
\end{aligned}$$

car on a un isomorphisme de $(P''\times Q'', P\times Q)$-bi-ensembles

$$(U_{\mathcal{P}} \times U_{\mathcal{Q}}) \times_{P'\times Q'} (V_{\mathcal{P}} \times V_{\mathcal{Q}}) \cong (U_{\mathcal{P}} \times_{P'} V_{\mathcal{P}}) \times \left(U_{\mathcal{Q}} \times_{Q'} V_{\mathcal{Q}}\right).$$

□

**Proposition 2.73:** *Soit $0 \longrightarrow F_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\mu} F'_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\eta} F''_{\mathcal{P}} \longrightarrow 0$ une suite exacte de foncteurs de bi-ensembles sur la catégorie $\mathcal{P}$ et soit $F_{\mathcal{Q}}$ un foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{Q}$. On peut alors définir une suite exacte de foncteur de bi-ensembles sur $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ :*

$$0 \longrightarrow F_{\mathcal{P}} \otimes_k F_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\mu\otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}}} F'_{\mathcal{P}} \otimes_k F_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\eta\otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}}} F''_{\mathcal{P}} \otimes_k F_{\mathcal{Q}} \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* On va commencer par définir $\mu \otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}}$ et vérifier que c'est une transformation naturelle. Soit $G = P \times Q$, où $P$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $Q$ un objet de $\mathcal{Q}$. On définit alors $(\mu \otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}})(G) : (F_{\mathcal{P}} \otimes_k F_{\mathcal{Q}})(G) \longrightarrow (F'_{\mathcal{P}} \otimes_k F_{\mathcal{Q}})(G)$ par

$$(\mu \otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}})(P \times Q) = \mu(P) \otimes_k \mathrm{Id}_{F_{\mathcal{Q}}(Q)} : F_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q) \longrightarrow F'_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q).$$

Il est alors facile de vérifier que c'est bien une transformation naturelle, en vérifiant que c'est le cas pour les bi-ensembles transitifs et en utilisant le fait que l'on a des applications $k$-linéaires. Il faut maintenant vérifier que l'on obtient bien une suite exacte. Par la proposition 2.20, il suffit de vérifier que c'est une suite exacte quand on l'évalue en un groupe $G$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$. Soit $G = P \times Q$, où $P$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $Q$ un objet de $\mathcal{Q}$. Il faut vérifier que la suite de $k$-espaces vectoriels suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow F_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q) \longrightarrow F'_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q) \longrightarrow F''_{\mathcal{P}}(P) \otimes_k F_{\mathcal{Q}}(Q) \longrightarrow 0.$$

Mais, par la proposition 2.20, la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow F_{\mathcal{P}}(P) \xrightarrow{\mu(P)} F'_{\mathcal{P}}(P) \xrightarrow{\eta(P)} F''_{\mathcal{P}}(P) \longrightarrow 0,$$

ce qui implique que la suite précédente est aussi exacte. □

### 2.7.1 Le produit de foncteurs simples

Soient $P$ un objet de $\mathcal{P}$, $Q$ un objet de $\mathcal{Q}$, $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(P)$-module simple et $W$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(Q)$-module simple. On veut montrer le théorème suivant :

**Théorème 2.74:** *On considère $S_{P,V}$ comme un foncteur simple sur $\mathcal{P}$ et $S_{Q,W}$ un foncteur simple sur $\mathcal{Q}$. Alors le foncteur $S_{P,V} \otimes_k S_{Q,W}$ est, sur la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, isomorphe au foncteur simple $S_{P\times Q,V\otimes_k W}$.*

Pour cela, on va commencer par prouver la proposition suivante :

**Proposition 2.75:** *On considère $L_{P,V}$ comme un foncteur sur $\mathcal{P}$ et $L_{Q,W}$ un foncteur sur $\mathcal{Q}$. Alors le foncteur $L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W}$ est, sur la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, isomorphe au foncteur $L_{P\times Q,V\otimes_k W}$.*

*Démonstration.* Soient $G$ un objet de $\mathcal{P}$ et $H$ un objet de $\mathcal{Q}$. Alors on a que :

$$\left(L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W}\right)(G \times H) = \left(kB(G,P) \otimes_{kB(P,P)} V\right) \otimes_k \left(kB(H,Q) \otimes_{kB(Q,Q)} W\right)$$

et

$$\begin{aligned}(L_{P\times Q,V\otimes_k W})(G \times H) &= kB(G \times H, P \times Q) \otimes_{kB(P\times Q,P\times Q)} (V \otimes_k W)\\ &\cong (kB(G,P) \otimes_k kB(H,Q)) \otimes_{kB(P,P)\otimes_k kB(Q,Q)} (V \otimes_k W).\end{aligned}$$

Ce sont clairement des $k$-espaces vectoriels isomorphes, via l'application $\varphi(G \times H)$ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi(G \times H) : \left(L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W}\right)(G \times H) &\longrightarrow L_{P\times Q,V\otimes_k W}(G \times H)\\ (u_1 \otimes_{kB(P,P)} v) \otimes_k (u_2 \otimes_{kB(Q,Q)} w) &\longmapsto \varepsilon(u_1 \otimes_k u_2) \otimes_{kB(P\times Q,P\times Q)} (v \otimes_k w).\end{aligned}$$

Cela induit une transformation naturelle $\varphi : L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W} \longrightarrow L_{P\times Q,V\otimes_k W}$. □

Alors, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W} \arrow[r, two heads, "proj \otimes_k proj"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, two heads, "\psi"] & S_{P,V} \otimes_k S_{Q,W} \\ L_{P\times Q, V\otimes_k W} \arrow[r, two heads, "proj"] & S_{P\times Q, V\otimes_k W} \end{tikzcd}$$

On pose $\psi = proj \circ \varphi : L_{P,V} \otimes_k L_{Q,W} \longrightarrow S_{P\times Q,V\otimes_k W}$.

**Lemme 2.76:** *Le noyau de $proj \otimes_k proj$ est contenu dans le noyau de $\psi$.*

*Démonstration.* Par la proposition 2.20, il suffit de le vérifier pour un groupe $G \times H$ où $G$ est un objet de $\mathcal{P}$ et $H$ est un objet de $\mathcal{Q}$. De plus,

$$\mathrm{Ker}(proj \otimes_k proj) = J_{P,V} \otimes_k L_{Q,W} + L_{P,V} \otimes_k J_{Q,W}$$

et la remarque 2.33 nous donne une description de $J_{P,V}(G)$ et $J_{Q,W}(H)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(G,P)$ et $v_i \in V$ tels que $\sum_{i=1}^n (\alpha \times_G u_i)\cdot v_i = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(P,G)$ (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in J_{P,V}(G)$). Soit aussi $u \otimes w \in L_{Q,W}$. On doit vérifier que $\psi(G\times H)(\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i) \otimes_k (u\otimes w) = 0$, ce qui est équivalent à vérifier que $\varphi(G\times H)((\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i) \otimes_k (u \otimes w)) \in J_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)$. Or

$$\varphi(G\times H)\left(\left(\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i\right) \otimes_k (u\otimes w)\right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(u_i \otimes_k u) \otimes (v_i \otimes_k w).$$

Soit $U$ un $(P\times Q, G\times H)$-bi-ensemble transitif. Alors il existe un $(P,G)$-bi-ensemble $U_{\mathcal{P}}$ et un $(Q,H)$-bi-ensemble $U_{\mathcal{Q}}$ tels que $U = U_{\mathcal{P}} \times U_{\mathcal{Q}}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n ([U] \times_{G\times H} \varepsilon(u_i \otimes_k u))\,(v_i \otimes_k w) &= \sum_{i=1}^n (\varepsilon(([U_{\mathcal{P}}] \times_G u_i) \otimes_k ([U_{\mathcal{Q}}] \times_H u)))\,(v_i \otimes_k w) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{([U_{\mathcal{P}}] \times_G u_i)(v_i)}_{=\,0} \otimes_k ([U_{\mathcal{Q}}] \times_H u)(w) \\ &=0\end{aligned}$$

Par $k$-linéarité, cela implique que

$$\varphi(G\times H)((\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i) \otimes_k (u \times w)) \in J_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H).$$

De manière analogue, on peut montrer que

$$\varphi(G\times H)(L_{P,V}(G) \otimes_k J_{Q,W}(H)) \subseteq J_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H).$$

□

Étant donné que $\mathrm{Ker}(proj \otimes_k proj) \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$, il existe une transformation naturelle $\mu : S_{P,V} \otimes_k S_{Q,W} \longrightarrow S_{P\times Q,V\otimes_k W}$. On va montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de le faire en un groupe $G\times H$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

**Lemme 2.77:** *Le $k$-espace vectoriel $S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)$ est nul si et seulement si $S_{P,V}(G)$ ou $S_{Q,W}(H)$ est nul.*

*Démonstration.* Si $S_{P,V}(G)$ ou $S_{Q,W}(H)$ est nul, alors $S_{P,V}(G)\otimes_k S_{Q,W}(H)=0$. Étant donné que $\mu(G\times H)$ est surjective (car $\varphi$ et *proj* et donc $\psi$ le sont) , on a alors que $S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)=0$.

Réciproquement, on suppose que $S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)=0$. Si $S_{P,V}(G)=0$, on a terminé, donc on peut supposer que $S_{P,V}(G)\neq 0$, c'est-à-dire que $J_{P,V}(G)\subsetneq L_{P,V}(G)$. Donc il existe $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_i\in kB(G,P)$, $v_i\in V$ pour tout $1\leq i\leq n$ et $\rho\in kB(P,G)$ tels que $\sum_{i=1}^n(\rho\times_G\varphi_i)(v_i)\neq 0$. On va montrer que $S_{Q,W}(H)=0$. Il suffit pour cela de montrer que les éléments $u\otimes w$, où $u\in kB(H,Q)$ et $w\in W$, sont dans $J_{Q,W}(H)$, car cela impliquera que $J_{Q,W}(H)=L_{Q,W}(H)$ et donc que $S_{Q,W}(H)=0$. Soient $u\in kB(H,Q)$ et $w\in W$. Pour tout $\widetilde{u}\in kB(Q,H)$, étant donné que $\sum_{i=1}^n\varepsilon(\varphi_i\otimes_k u)\otimes(v_i\otimes_k w)$ est dans $L_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)=J_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)$ :

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{i=1}^n\left(\varepsilon(\rho\otimes_k\widetilde{u})\varepsilon(\varphi_i\otimes_k u)\right)(v_i\otimes_k w)\\
&=\sum_{i=1}^n\varepsilon((\rho\times_G\varphi_i)\otimes_k(\widetilde{u}\times_H u))(v_i\otimes_k w)\\
&=\sum_{i=1}^n((\rho\times_G\varphi_i)(v_i))\otimes_k((\widetilde{u}\times_H u)(w))\\
&=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n(\rho\times_G\varphi_i)(v_i)\right)}_{\neq 0}\otimes_k((\widetilde{u}\times_H u)(w))
\end{aligned}$$

Par conséquent, on doit avoir $(\widetilde{u}\times_H u)(w)=0$. Comme $\widetilde{u}$ est arbitraire, cela implique que $u\otimes_k w\in J_{Q,W}(H)$. □

Ainsi, on peut supposer que $S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)$ et $S_{P,V}(G)\otimes_k S_{Q,W}(H)$ sont non-nuls car sinon, ils sont tous nuls et donc on a bien

$$S_{P,V}(G)\otimes_k S_{Q,W}(H)\cong S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H).$$

Mais alors, par le corollaire 4.2.4, page 58 de [Bou10], on sait que $S_{P,V}(G)$ est un $kB(G,G)$-module simple, $S_{Q,W}(H)$ est un $kB(H,H)$-module simple et $S_{P\times Q,V\otimes_k W}(G\times H)$ est un $kB(G\times H,G\times H)$-module simple. Etant donné que $k$ est algébriquement clos, le produit tensoriel de deux modules simples sur des algèbres de dimension finie sur $k$ est un module simple sur le produit tensoriel des algèbres (proposition 3.56, page 65 de [CR81] et le lemme de Schur, [CR88], Lemme 27.3, page 181), donc $S_{P,V}(G)\otimes_k S_{Q,W}(H)$ est un $kB(G,G)\otimes_k kB(H,H)$-module simple. Or $kB(G,G)\otimes_k kB(H,H)\cong kB(G\times H,G\times H)$ comme $k$-algèbre (remarque 2.71), donc on peut considérer $S_{P,V}(G)\otimes_k S_{Q,W}(H)$ comme un $kB(G\times H,G\times H)$-module simple. Ainsi on a un homomorphisme de modules non-nul entre deux $kB(G\times H,G\times H)$-modules simples, ce qui implique que c'est un isomorphisme grâce au lemme de Schur ([CR88], lemme 27.3, page 181). Ainsi, on a prouvé le théorème voulu :

**Théorème 2.78:** *On considère* $S_{P,V}$ *comme un foncteur simple sur* $\mathcal{P}$ *et* $S_{Q,W}$ *un foncteur simple sur* $\mathcal{Q}$*. Alors le foncteur* $S_{P,V} \otimes_k S_{Q,W}$ *est, sur la catégorie* $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$*, isomorphe au foncteur simple* $S_{P\times Q, V\otimes_k W}$*.*

# Chapitre 3

# Le foncteur des modules de permutation

Soit $k$ un corps de caractéristique $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

**Définition 3.1:** *De manière analogue au foncteur des modules de p-permutation (section 2.2.1), on va définir le foncteur de bi-ensembles des modules de permutation.*

*Soit $G$ un groupe fini. On définit $\Pi_k(G)$ comme le groupe de Grothendieck de la catégorie des $kG$-modules de permutation (le groupe de Grothendieck est pris par rapport à la somme directe, c'est-à-dire par rapport aux relations $[M \oplus N] - [M] - [N]$). C'est un $\mathbb{Z}$-module de génération finie car l'ensemble des $kG$-modules $k[G/H]$, où $H$ parcourt les sous-groupes de $G$ à conjugaison près, est un ensemble générateur de $\Pi_k(G)$.*

*Soient $G$ et $H$ deux groupes finis et soit $U$ un $(H, G)$-bi-ensemble fini. Alors on pose*

$$\Pi_k([U])([kP]) = [kU \otimes_{kG} kP]$$

*pour tout $kG$-module de permutation $kP$. Le $kH$-module $kU \otimes_{kG} kP$ est un module de permutation car il est isomorphe à $k(U \times_G P)$. Cela induit, par $\mathbb{Z}$-linéarité, une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\Pi_k([U]) : \Pi_k(G) \longrightarrow \Pi_k(H)$. Comme pour $\mathrm{pp}_k$, on peut alors définir $\Pi_k(u)$ pour tout $u \in B(H, G)$ et $\Pi_k$ est alors un foncteur de bi-ensembles sur $\mathbb{Z}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

*Comme dans la définition 2.27, on peut alors définir un foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\Pi_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

**Remarque 3.2:** Le foncteur $\mathbb{C}\Pi_k$ est un sous-foncteur du foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$.

On va maintenant construire un morphisme entre $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\Pi_k$. On pourra alors trouver les facteurs de composition de $\mathbb{C}\Pi_k$ à partir de ceux de $\mathbb{C}B$, qui sont déjà connus (théorème 2.58 et remarque 2.59).

**Proposition 3.3:** *Il existe un morphisme de foncteurs de bi-ensembles (c'est-à-dire une transformation naturelle $\mathbb{C}$-linéaire) $\theta$ entre $\mathbb{C}B$ et $\mathbb{C}\Pi_k$ tel que :*

$$\theta_G([G/L]) = [k(G/L)]$$

*pour tout groupe fini $G$ et pour tout sous-groupe $L$ de $G$, où on dénote par $\theta_G$ l'application $\theta(G) : \mathbb{C}B(G) \to \mathbb{C}\Pi_k(G)$ et $[G/L]$, $[k(G/L)]$ sont les classes d'isomorphisme du $G$-ensemble $G/L$ et du $kG$-module $k(G/L)$ respectivement.*

*Démonstration.* On étend par $\mathbb{C}$-linéarité la définition de $\theta_G$ à $\mathbb{C}B(G)$ et il est alors facile de vérifier que $\theta$ est bien défini et que c'est une transformation naturelle $\mathbb{C}$-linéaire. $\square$

**Remarque 3.4:** On sait que $(\operatorname{Coker}\theta)(G) = \operatorname{Coker}\theta_G$, pour tout groupe fini $G$ (proposition 2.20), et par conséquent, l'image de la transformation naturelle $\theta$ est $\mathbb{C}\Pi_k$.

**Définition 3.5:** *Un groupe fini $H$ est dit* ***$p$-hypo-élémentaire*** *(ou* ***cyclique modulo*** *$p$) si le quotient $H/O_p(H)$ est cyclique ($O_p(H)$ est le plus grand $p$-sous-groupe normal de $H$) ; en d'autre terme, $H$ a un $p$-sous-groupe normal dont le quotient associé est un $p'$-groupe cyclique.*

*Si $p = 0$, un groupe* ***0-hypo-élémentaire*** *est un groupe cyclique. On dénote par $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les groupes finis $p$-hypo-élémentaires.*

Maintenant, il faut déterminer le noyau de la transformation naturelle $\theta$. Pour cela, on va utiliser le fait que $(\operatorname{Ker}\theta)(G) = \operatorname{Ker}\theta_G$, pour tout groupe fini $G$ (proposition 2.20) et que l'ensemble $\{e_H^G \mid H \leq_G G\}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}B(G)$, pour tout groupe fini $G$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant, dû à Conlon. On dénote par $\overline{k}$ la clôture algébrique de $k$.

**Lemme 3.6:** *Soient $G$ un groupe fini et $E$ l'ensemble des classes de conjugaison de paires $(H, g)$, où $H$ est un sous-groupe $p$-hypo-élémentaire de $G$ et $g$ un générateur de $H/O_p(H)$. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_{\overline{k}}(G) \cong \bigoplus_{(H,g)\in E} \mathbb{C}.$$

*De plus, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}B(G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\theta_G"] & \bigoplus_{H\leq_G G}\mathbb{C} \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_{\overline{k}}(G) \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_{(H,g)\in E}\mathbb{C} \end{tikzcd}$$

*On écrit aussi $e_H^G$ pour les idempotents primitifs dans $\bigoplus_{H\leq_G G}\mathbb{C}$ qui sont les images des idempotents primitifs $e_H^G \in \mathbb{C}B(G)$. On note $\varepsilon_{H,g}$ pour les idempotents primitifs dans $\bigoplus_{(H,g)\in E}\mathbb{C}$. L'application $\lambda$ envoie $e_H^G$ sur $\sum_{(H,g)\in E}\varepsilon_{H,g}$ si $H$ est un groupe $p$-hypo-élémentaire, et sur zéro sinon.*

**Remarque 3.7:** L'application $\theta_G$ est définie entre $\mathbb{C}B(G)$ et $\mathbb{C}\Pi_{\overline{k}}$, mais comme $\mathbb{C}\Pi_{\overline{k}}$ est un sous-foncteur de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_{\overline{k}}$, on peut l'étendre à $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_{\overline{k}}$ en composant avec l'inclusion.

*Démonstration.* Une preuve de ce résultat en caractéristique $p \neq 0$ peut être trouvée dans [Ben04], page 188. Le cas $p = 0$ est trivial. $\square$

**Proposition 3.8:** *Soit $G$ un groupe fini. L'ensemble*

$$B_{\mathrm{Ker}} = \left\{e_H^G \,\middle|\, H \leq_G G, H \notin \mathcal{H}\right\}$$

*est une $\mathbb{C}$-base de $\operatorname{Ker}\theta_G$. De plus, l'ensemble*

$$B_{\mathrm{Im}} = \left\{\theta(e_H^G) \,\middle|\, H \leq_G G, H \in \mathcal{H}\right\}$$

*est une $\mathbb{C}$-base de $\operatorname{Im}\theta_G$.*

*Démonstration.* On considère la composition suivante d'applications :

$$\mathbb{C}B(G) \longrightarrow \mathbb{C}\Pi_k(G) \xrightarrow{f} \mathbb{C}\Pi_{\overline{k}}(G) \xrightarrow{\imath} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_{\overline{k}}(G),$$

où $f$ est l'extension scalaire de $k$ vers $\overline{k}$ et $\imath$ l'inclusion. Clairement, l'application $\imath$ est injective. Soient $M$ et $N$ deux $kG$-modules de permutation tels que $f([M]) = f([N])$, c'est-à-dire tels que $\overline{k} \otimes_k M \cong \overline{k} \otimes_k N$. Comme $M$ et $N$ sont de génération finie, cela implique que $L \otimes_k M \cong L \otimes_k N$, pour une certaine extension de corps $L$ de $k$ de dimension finie. Mais, par l'exercice 2, page 138 de [CR81], cela implique que $M \cong N$. Donc $f$ est aussi une application injective.

Alors l'application $g = \imath \circ f \circ \theta_G$ est exactement l'application $\theta_G$ du lemme 3.6, et donc $B_{\mathrm{Ker}}$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Ker}\, g$ et l'ensemble $\{g(e_H^G) \mid H \leq_G G, H \in \mathcal{H}\}$ est linéairement indépendant. Comme $\imath \circ f$ est injectif, cela implique que $B_{\mathrm{Ker}}$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Ker}\,\theta_G$ et que l'ensemble $B_{\mathrm{Im}}$ est linéairement indépendant. On sait déjà que $B_{\mathrm{Ker}}$ est un ensemble linéairement indépendant. Si $n$ est le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de $G$, on a :

$$n = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}B(G) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,\theta_G + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,\theta_G \geq |B_{\mathrm{Ker}}| + |B_{\mathrm{Im}}| = n$$

et ainsi, on doit avoir égalité, ce qui prouve le résultat. □

On a maintenant une base de $\mathrm{Ker}\,\theta_G$ et $\mathrm{Im}\,\theta_G$, pour tout groupe fini $G$, et on va les utiliser pour étudier l'image des facteurs de composition de $\mathbb{C}B$.

Soit $G$ un $B$-groupe fini. Si $G$ n'est pas un groupe $p$-hypo-élémentaire, alors $e_G^G \in \mathrm{Ker}\,\theta_G$, et donc $\mathbf{e}_G \subset \mathrm{Ker}\,\theta_G$. Ainsi, on peut supposer que $G$ est un groupe $p$-hypo-élémentaire. Maintenant, le foncteur $\theta(\mathbf{e}_G)/\theta(\mathbf{j}_G)$ est un quotient du foncteur simple $\mathbf{e}_G/\mathbf{j}_G \cong S_{G,\mathbb{C}}$. Par conséquent, il est soit nul, soit isomorphe à $S_{G,\mathbb{C}}$. Il est nul si et seulement si $\theta(\mathbf{e}_G) = \theta(\mathbf{j}_G)$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{e}_G \subseteq \mathbf{j}_G + \mathrm{Ker}\,\theta$. Mais $e_G^G \in \mathbf{e}_G(G)$ et $e_G^G \notin \mathbf{j}_G(G) + \mathrm{Ker}\,\theta_G$, car $G \in \mathcal{H}$. Et donc $\theta(\mathbf{e}_G) \neq \theta(\mathbf{j}_G)$ et $\theta(\mathbf{e}_G)/\theta(\mathbf{j}_G) \cong S_{G,\mathbb{C}}$.

Ainsi on a trouvé l'image de tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ dans $\mathbb{C}\Pi_k$ et comme tout facteur de composition de $\mathbb{C}\Pi_k$ a une pré-image dans $\mathbb{C}B$, cela nous donne une liste complète de tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\Pi_k$. On a ainsi prouvé le théorème suivant :

**Théorème 3.9:** *Les facteurs de composition du foncteur $\mathbb{C}\Pi_k$ sur la catégorie $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ sont les foncteurs simples $S_{H,\mathbb{C}}$, où $H$ est un $B$-groupe fini $p$-hypo-élémentaire et où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module trivial.*

**Remarque 3.10:**

1. Avec la même méthode, on peut trouver une suite infinie de sous-foncteurs de $\mathbb{C}\Pi_k$ telle que tout quotient successif est simple. Mais pour faire cela, on doit faire un choix. De plus, cette suite est finie si on l'évalue en un groupe fini.
2. Avec la même méthode, on peut trouver une description de tous les sous-foncteurs de $\mathbb{C}\Pi_k$. On utilise pour cela la description des sous-foncteurs de $\mathbb{C}B$ et on obtient une bijection entre les sous-foncteurs de $\mathbb{C}\Pi_k$ et les sous-ensembles fermés de $[\text{B-gr}(\mathcal{C})] \cap \mathcal{H}$.
3. Si $p = 0$, l'unique $B$-groupe qui est cyclique est $\mathbf{1}$ et donc on a obtenu que $\mathbb{C}\Pi_k \cong S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$, ce qui est la proposition 4.4.8 de [Bou10].

De plus, la preuve du théorème précédent implique le théorème suivant :

**Théorème 3.11:** *Soit $G$ un groupe fini. Alors $\beta(G)$ est un groupe $p$-hypo-élémentaire si et seulement si $G$ lui-même est un groupe $p$-hypo-élémentaire.*

*Démonstration.* Soient $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Alors, par la proposition 3.8, on sait que $e_H^G$ est un élément de $\operatorname{Ker}\theta_G$ si et seulement si $H \notin \mathcal{H}$.

D'un autre côté, en utilisant la bijection entre les sous-foncteurs de $\mathbb{C}B(G)$ et les sous-ensembles fermés de [B-gr($\mathcal{C}$)], on trouve que le noyau $\operatorname{Ker}\theta_G$ correspond à l'ensemble $\mathcal{N} = [\text{B-gr}(\mathcal{C})] \cap \{G \mid G \notin \mathcal{H}\}$. Mais cela implique que $e_H^G$ est dans $\operatorname{Ker}\theta_G$ si et seulement si il existe $L \in \mathcal{N}$ tel que $H \gg L$, ce qui est équivalent à $\beta(H) \gg L$. Par conséquent, $e_H^G \in \operatorname{Ker}\theta_G$ si et seulement si $\beta(H) \in \mathcal{N}$ (car $\mathcal{N}$ est fermé), c'est-à-dire si et seulement si $\beta(H) \notin \mathcal{H}$.

Si on met ensemble ces deux résultats, on obtient que $H \notin \mathcal{H}$ si et seulement si $\beta(H) \notin \mathcal{H}$, ce qui prouve que $H \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\beta(H) \in \mathcal{H}$. $\square$

Dans le chapitre 5 (en particulier la section 5.2.1), on va étudier plus précisément les $B$-groupes finis $p$-hypo-élémentaires et donner une classification de ces groupes.

# Chapitre 4

# Le foncteur des modules de $p$-permutation

Dans ce chapitre, je ne vais considérer que des catégories $\mathcal{C} = R\mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie replète de $\underline{\text{GrB}}$.

De plus, à partir de maintenant, je prends pour l'anneau $R$ le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. De fait, il suffit d'un corps de caractéristique zéro qui contient toutes les racines de l'unité sauf pour quelques résultats où il faut de plus que ce corps soit algébriquement clos.

**Rappel 4.1:** Soit $k$ un corps algébriquement clos. Dans la section 2.2.1, on a défini le foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ :

Pour tout groupe fini $G$, $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant comme base les $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables.

Pour tout $(H, G)$-bi-ensemble fini $U$, on a

$$\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k([U])([M]) = [kU \otimes_{kG} M],$$

pour tout $kG$-module de $p$-permutation $M$.

## 4.1 Facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ à partir de cas connus

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. Par la proposition 2.43, les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur une sous-catégorie $\mathbb{C}$-linéaire pleine de $\mathbb{C}\,\underline{\text{GrB}}$ sont aussi des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\text{GrB}}$. Or, en se restreignant à la catégorie des $p$-groupes finis ou des $p'$-groupes finis, le foncteur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ correspond à des foncteurs déjà étudiés et dont on connaît les facteurs de composition.

### 4.1.1 Facteurs de composition en caractéristique zéro

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}\,\underline{\text{GrB}}$ dont les objets sont les groupes finis d'ordre premier à $p$ (si $p = 0$, alors tous les groupes finis sont d'ordre premier à $p$). Soient $G$ un groupe fini d'ordre premier à $p$ et $M$ un $kG$-module indécomposable. Par la proposition 1.9, le seul vortex de $M$ est le groupe trivial $\mathbf{1}$. Étant donné qu'il n'y a qu'un seul $k\mathbf{1}$-module indécomposable (à isomorphisme près), $M$ doit être un facteur direct de

$\mathrm{Ind}_{\mathbf{1}}^G k = kG$. En particulier, cela implique que $M$ est un module de $p$-permutation (ou de source triviale). Comme $M$ est arbitraire, cela implique que tout $kG$-module est un module de $p$-permutation. Par conséquent, $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = \mathbb{C}R_k(G)$ pour tout groupe fini d'ordre premier à $p$. On peut remarquer que $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(u)$ et $\mathbb{C}R_k(u)$ sont les mêmes applications $\mathbb{C}$-linéaires, pour tout $u \in \mathbb{C}B(H,G)$ et pour tous groupes finis $H$ et $G$ de $\mathcal{C}$. Par conséquent, sur la catégorie $\mathcal{C}$, les foncteurs $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ et $\mathbb{C}R_k$ sont égaux.

**Théorème 4.2:** *Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les groupes finis d'ordres premiers à $p$. Les foncteurs simples $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $m$ parcourt les entiers premiers à $p$ et $\xi$ les caractères primitifs $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$, sont exactement tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathcal{C}$. De plus, ils sont de multiplicité 1.*

*Démonstration.* Par la proposition 2.43, les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k = \mathbb{C}R_k$ sur $\mathcal{C}$ sont aussi des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. Les facteurs de composition de $\mathbb{C}R_k$ sur $\mathcal{C}$ sont donnés par le théorème 2.65. □

**Corollaire 4.3:** *Les foncteurs simples $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $m$ parcourt les entiers premiers à $p$ et $\xi$ les caractères primitifs $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$, sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème précédent et de la proposition 2.43. □

### 4.1.2 Facteurs de composition en caractéristique $p$ sur les $p$-groupes

On suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 0$. Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les $p$-groupes finis. Soit $P$ un $p$-groupe fini. On va montrer que les seuls $kP$-modules de $p$-permutation sont les modules de permutation. Pour cela, il suffit de montrer que les facteurs directs d'un module de permutation sont aussi des modules de permutation. Or, on a le lemme suivant :

**Lemme 4.4:** [Ben04, page 92]
*Le $kP$-module de permutation transitif $k[P/Q]$ est indécomposable, pour tout sous-groupe $Q$ de $P$.*

Ainsi les $kP$-modules de permutation transitifs sont indécomposables et donc tout facteur direct indécomposable d'un module de permutation est aussi un module de permutation.

Alors, la transformation linéaire $\theta : \mathbb{C}B \longrightarrow \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ du chapitre 3 est surjective sur $\mathcal{C}$ ($\mathbb{C}\Pi_k = \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathcal{C}$ car tout module de $p$-permutation est un module de permutation). La description du noyau de $\theta$ donnée par la proposition 3.8 permet de conclure que c'est même un isomorphisme (car tous les objets de $\mathcal{C}$ sont des $p$-groupes finis donc des groupes $p$-hypo-élémentaires).

**Théorème 4.5:** *Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les $p$-groupes finis. Les foncteurs simples $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ et $S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}$ sont exactement tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathcal{C}$. Ils sont de multiplicité 1.*

*Démonstration.* Par la proposition 2.43, les facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ sur $\mathcal{C}$ sont aussi des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. Or les facteurs de composition de $\mathbb{C}B$ sur $\mathcal{C}$ sont les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ est un objet de $\mathcal{C}$ qui est un $B$-groupe et $\mathbb{C}$ le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial (remarque 2.59). Or les seuls $p$-groupes finis qui sont des $B$-groupes sont $\mathbf{1}$ et $C_p \times C_p$ (5.6.9 "le cas des $p$-groupes", page 94, [Bou10]). Ainsi $\mathbb{C}B$ n'a que deux facteurs de composition sur $\mathcal{C}$ : $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ et $S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}$. □

**Corollaire 4.6:** *Les foncteurs simples $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ et $S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème précédent et de la proposition 2.43. □

### 4.1.3 Facteurs de composition du foncteur des modules de permutation

Etant donné que $\mathbb{C}\Pi_k$ est un sous-foncteur du foncteur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, les facteurs de composition de $\mathbb{C}\Pi_k$ sont aussi des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (mais leur multiplicité comme facteur de composition dans $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ peut être plus grande que dans $\mathbb{C}\Pi_k$). Ainsi :

**Théorème 4.7:** *Les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ est un $B$-groupe fini $p$-hypo-élémentaire et $\mathbb{C}$ le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial, sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.9. □

### 4.1.4 Résumé de la situation

Ainsi, on sait déjà que les foncteurs simples suivants sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$) :

- Les foncteurs simples $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ et $S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}$ (si $p \neq 0$) ;
- Les foncteurs simples $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $m$ parcourt les entiers premiers à $p$ et $\xi$ les caractères primitifs $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$.
- Les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ parcourt les $B$-groupes finis $p$-hypo-élémentaires.

Si $G$ est un $p$-groupe fini ou un $p'$-groupe fini et $S_{G,V}$ un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ alors $S_{G,V}$ est un des foncteurs simples de la liste ci-dessus. Par conséquent, si $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ a d'autres facteurs de composition $S_{G,V}$, alors $G$ n'est ni un $p$-groupe ni un $p'$-groupe et c'est donc ces groupes qu'il faut étudier.

## 4.2 Facteurs de composition associés à un groupe abélien

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P}$.

On peut montrer en utilisant la méthode de la section 4.3 qu'il existe $(q-1)$ $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \times C_p \times C_q)$-modules simples $V$ (pas forcément distincts) tels que $S_{C_p\times C_p\times C_q,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ en caractéristique $p$ (voir chapitre A pour la table des dimensions). Par contre, avec cette méthode, je ne peux pas directement déterminer ce que vaut $V$. Je ne vais pas donner les détails car on va prouver le théorème suivant qui traite le cas des groupes abéliens en général et permet de déterminer les valeurs de $V$.

**Théorème 4.8:** *Si $G$ est un groupe abélien fini et $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple, alors $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ si et seulement si il existe un entier $m$ premier à $p$ et un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ tels que $G \cong C_m$ ou $G \cong C_p \times C_p \times C_m$ et $V$ est le module $\mathbb{C}_\xi$ (où $\mathrm{Out}(C_p \times C_p)$ agit trivialement dans le second cas). De plus, la multiplicité de $S_{G,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

Soit $\mathcal{P}$ la sous-catégorie pleine de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les $p$-groupes abéliens finis et soit $\mathcal{Q}$ la sous-catégorie pleine de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les $p'$-groupes finis. Soit de plus $\mathcal{C}_{p\times p'}$ la sous-catégorie pleine de $k\,\underline{\mathrm{GrB}}$ dont les objets sont les groupes de la forme $P \times Q$ où $P$ est un $p$-groupe abélien et $Q$ un $p'$-groupe.

**Théorème 4.9:** *Le foncteur de bi-ensembles $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur la catégorie $\mathcal{C}_{p\times p'}$ est isomorphe au foncteur $\mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k$, où $\mathbb{C}B$ est considéré comme un foncteur sur $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}R_k$ comme un foncteur sur $\mathcal{Q}$.*

*Démonstration.* Soient $P$ un $p$-groupe abélien fini et $Q$ un $p'$-groupe fini. On définit $\mu(P \times Q)$ par :

$$\begin{aligned}\mu(P \times Q) : \mathbb{C}B(P) \otimes \mathbb{C}R_k(Q) &\longrightarrow \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(P \times Q),\\ [X] \otimes_{\mathbb{C}} [V] &\longmapsto [kX \otimes_k V]\end{aligned}$$

pour tout $P$-ensemble $X$ et pour tout $kQ$-module $V$. L'action de $P \times Q$ sur $kX \otimes_k V$ est telle que $P$ agit sur $kX$ et $Q$ agit sur $V$. Le $k(P \times Q)$ -module $kX \otimes_k V$ est bien un module de $p$-permutation car $V$ est un $kQ$-module de $p$-permutation. On prolonge la définition de $\mu(P \times Q)$ à $\mathbb{C}B(P) \otimes \mathbb{C}R_k(Q)$ par $\mathbb{C}$-linéarité. C'est une application $\mathbb{C}$-linéaire bijective : on peut définir son inverse par :

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(P \times Q) : \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(P \times Q) &\longrightarrow \mathbb{C}B(P) \otimes \mathbb{C}R_k(Q),\\ [M] &\longmapsto [P/D] \otimes V\end{aligned}$$

pour tout $k(P \times Q)$-module de $p$-permutation $M$ indécomposable, où $D$ est un vortex de $M$ et $V$ est un $kQ$-module tel que $M = \mathrm{Inf}_{P/D\times Q}^{P\times Q} \mathrm{Ind}_Q^{P/D\times Q} V$ (un tel $D$ et un tel $V$ existent grâce au théorème 1.19 et à la proposition 1.23).

Il reste à vérifier qu'alors $\mu$ est une transformation naturelle entre $\mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k$ et $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$. Grâce à la $\mathbb{C}$-linéarité de $\mu$, il suffit de le vérifier pour les éléments d'une base de $\mathbb{C}B(P \times Q, P' \times Q')$, où $P$ et $P'$ sont des $p$-groupes abéliens finis et $Q$ et $Q'$ sont des $p'$-groupes finis. Soit donc $U$ un $(P \times Q, P' \times Q')$-bi-ensemble transitif. On doit vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}B(P) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k(Q) \arrow[r, "\mu(P\times Q)"] \arrow[d, "(\mathbb{C}B\otimes\mathbb{C}R_k)([U])"'] & \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(P \times Q) \arrow[d, "\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k([U])"] \\ \mathbb{C}B(P') \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k(Q') \arrow[r, "\mu(P'\times Q')"'] & \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(P' \times Q') \end{tikzcd}$$

Il existe un $(P, P')$-bi-ensemble (transitif) $U_{\mathcal{P}}$ et un $(Q, Q')$ bi-ensemble (transitif) $U_{\mathcal{Q}}$ tels que $U = U_{\mathcal{P}} \times U_{\mathcal{Q}}$ (proposition 2.70). Il suffit de vérifier que le diagramme commute pour des éléments de base de $\mathbb{C}B(P) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}R_k(Q)$. Soient donc $X$ un $P$-ensemble et $V$

un $kQ$-module. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k([U]) \circ \mu(P\times Q)([X]\otimes_{\mathbb{C}}[V]) &= \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k([U])([kX\otimes_k V])\\ &= [kU \otimes_{k(P\times Q)} (kX\otimes_k V)]\\ &= [(kU_{\mathcal{P}}\otimes_k kU_{\mathcal{Q}})\otimes_{k(P\times Q)} (kX\otimes_k V)]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\mu(P'\times Q')\circ(\mathbb{C}B\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}R_k)([U])([X]\otimes_{\mathbb{C}}[V]) =\\ &\quad= \mu(P'\times Q')\circ(\mathbb{C}B([U_{\mathcal{P}}])\otimes \mathbb{C}R_k([U_{\mathcal{Q}}]))([X]\otimes_{\mathbb{C}}[V])\\ &\quad= \mu(P'\times Q')([U_{\mathcal{P}}\times_P X]\otimes_{\mathbb{C}}[kU_{\mathcal{Q}}\otimes_{kQ} V])\\ &\quad= [k(U_{\mathcal{P}}\times_P X)\otimes_k (kU_{\mathcal{Q}}\otimes_{kQ} V)]\\ &\quad= [(kU_{\mathcal{P}}\otimes_{kP} kX)\otimes_k (kU_{\mathcal{Q}}\otimes_{kQ} V)].\end{aligned}$$

Étant donné la définition de l'action de $P\times Q$ sur $kU_{\mathcal{P}}\otimes_k kU_{\mathcal{Q}}$ et $[kX\otimes_k V]$, il est facile de vérifier que l'on a un isomorphisme de $k(P'\times Q')$-modules

$$(kU_{\mathcal{P}}\otimes_k kU_{\mathcal{Q}})\otimes_{k(P\times Q)} (kX\otimes_k V) \cong (kU_{\mathcal{P}}\otimes_{kP} kX)\otimes_k (kU_{\mathcal{Q}}\otimes_{kQ} V).$$

□

Or sur $\mathcal{Q}$, $\mathbb{C}R_k$ se décompose en une somme directe de foncteurs simples :

$$\mathbb{C}R_k \cong \bigoplus_{(m,\xi)} S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{C}_\xi},$$

où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Par conséquent, sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$, on a la décomposition suivante :

$$\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k \cong \bigoplus_{(m,\xi)} \mathbb{C}B\otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi},$$

où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Ainsi, pour trouver les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$, il suffit de trouver les facteurs de composition de $\mathbb{C}B\otimes_{\mathbb{C}} S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{C}_\xi}$ sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$, pour tout entier positif $m$ premier à $p$ et pour tout caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Soient donc $m$ un entier positif premier à $p$ et $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$ un caractère primitif. Par 5.6.9 “Le cas des $p$-groupes”, page 94 de [Bou10], on a la suite exacte suivante, sur $\mathcal{P}$ :

$$0 \longrightarrow S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}B \longrightarrow S_{\mathbf{1},\mathbb{C}} \longrightarrow 0.$$

Mais alors, en appliquant la proposition 2.73, on a la suite exacte suivante (sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$) :

$$0 \longrightarrow S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}\otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow \mathbb{C}B\otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}\otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow 0.$$

On peut alors appliquer le théorème 2.78 et l'on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow \mathbb{C}B\otimes_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow S_{C_m,\mathbb{C}_\xi} \longrightarrow 0$$

sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$, où le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \times C_p \times C_m)$-module $\mathbb{C}_\xi$ est défini de la façon suivante : l'action de $\mathrm{Out}(C_p \times C_p)$ est triviale et $\mathrm{Out}(C_m)$ agit via $\xi$ (comme $\mathrm{Out}(C_p \times C_p \times C_m) \cong \mathrm{Out}(C_p \times C_p) \times \mathrm{Out}(C_m)$, on peut décrire les actions séparément).

Ainsi les facteurs de composition de $\mathbb{C}B \otimes_{\mathbb{C}} S_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{C}_\xi}$ sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$ sont $S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi}$ et $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$. Par conséquent, on a prouvé le théorème suivant :

**Théorème 4.10:** *Les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathcal{C}_{p\times p'}$ sont les foncteurs simples $S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi}$ et $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Leur multiplicité comme facteur de composition est égale à 1.*

Par la description des facteurs de composition de la section 2.3, cela implique le théorème suivant :

**Théorème 4.11:** *Si $G$ est un objet de $\mathcal{C}_{p\times p'}$ (c'est-à-dire le produit direct d'un $p$-groupe abélien fini avec un $p'$-groupe fini) et $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple, alors $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ si et seulement si il existe un entier $m$ premier à $p$ et un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ tels que $G \cong C_m$ ou $G \cong C_p \times C_p \times C_m$ et $V$ est le module $\mathbb{C}_\xi$. De plus, la multiplicité de $S_{G,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

Comme corollaire, on obtient le théorème 4.8 :

**Corollaire 4.12:** *Si $G$ est un groupe abélien fini et $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple, alors $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ si et seulement si il existe un entier $m$ premier à $p$ et un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ tels que $G \cong C_m$ ou $G \cong C_p \times C_p \times C_m$ et $V$ est le module $\mathbb{C}_\xi$. De plus, la multiplicité de $S_{G,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

## 4.3 Facteurs de composition associés à des groupes $G$ d'ordre petit

Dans cette section, je vais expliquer la méthode que j'ai utilisée pour trouver de nouveaux facteurs de composition pour $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, en traitant le cas des groupes finis d'ordre petit.

Soient $k$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ et $G$ un groupe fini (d'ordre petit). On veut déterminer si $S_{G,V}$ (où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple) est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (sur la catégorie $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$). Pour cela, on va procéder par récurrence. On suppose que l'on sait combien de fois $S_{H,V}$ apparaît comme facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, pour tout sous-quotient propre $H$ de $G$. De plus, on va se restreindre à la catégorie $\mathcal{C}_n$, où $n = |G|$. Alors, en utilisant la proposition 2.43, cela permettra de conclure pour la catégorie $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.

Sur la catégorie $\mathcal{C}_n$, pour tout foncteur de bi-ensembles, il existe une suite finie de sous-foncteurs dont les quotients successifs sont simples (proposition 2.45). En particulier, cela implique que la somme des dimensions des facteurs de composition évalués en $G$ vaut la dimension de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = \sum_{(H,V)\in CF(G)} m_{H,V} \dim_{\mathbb{C}} S_{H,V}(G),$$

où $CF(G)$ est l'ensemble des paires $(H, V)$ où $H$ est un sous-quotient de $G$ et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple, tels que $S_{H,V}$ soit un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ et où $m_{H,V}$ est la multiplicité de $S_{H,V}$ comme facteur de composition. On peut calculer $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ grâce au corollaire 1.22 et on sait quels foncteurs simples $S_{H,V}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ si $H$ est un sous-quotient propre de $G$ (grâce à l'hypothèse de récurrence). Ainsi, si l'on arrive à calculer $\dim_{\mathbb{C}} S_{H,V}(G)$ (par exemple, en utilisant les résultats de la section 2.6), on peut savoir si $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ ou non (pour des $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-modules $V$ qui restent à déterminer).

Voici en détail la méthode que j'ai appliquée :

i) Pour pouvoir faire les calculs de la suite, on a besoin des sous-groupes de $G$. C'est pourquoi on commence par trouver le treillis des sous-groupes de $G$. On détermine aussi les classes de conjugaison de $G$ et l'ordre de chaque élément. Étant donné que cela sera dans certains cas utile, on va aussi déterminer $\beta(G)$ en calculant $m_{G,N}$ pour tout sous-groupe normal $N$ de $G$.

ii) On calcule $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = \sum_D \ell_p(N_G(D)/D)$, où $D$ parcourt les $p$-sous-groupes de $G$, à conjugaison près (corollaire 1.22).

iii) En utilisant la section 2.6, on peut calculer $\dim_{\mathbb{C}} S_{H,V}(G)$ (malheureusement pas toujours facilement) pour les paires $(H, V)$ où $H$ est un sous-quotient propre de $G$ et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple tels que $S_{H,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$.

L'annexe A contient un certain nombre de résultats utiles pour ces calculs : pour un certain nombre de petits groupes $G$, on trouve entre autres les foncteurs simples $S_{G,V}$ qui sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, ce qui permet de trouver les éléments de $CF(G)$ (c'est-à-dire l'ensemble des paires $(H, V)$ où $H$ est un sous-quotient propre de $G$ et $V$ un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(H)$-module simple, tels que $S_{H,V}$ soit un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$). On trouve aussi les valeurs de $\beta(G)$, ce qui est utile si l'on doit utiliser le théorème 2.66 de la section 2.6. L'annexe B est utile si l'on doit utiliser le théorème 2.67 de la section 2.6 car il contient la liste des caractères primitifs ainsi que la description de leur noyau pour de petits groupes cycliques.

**Remarque 4.13:** Soient $m$ un entier positif et $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$ un caractère primitif. Alors $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ se décompose en un produit direct de groupes cycliques $A_1 \times \ldots \times A_m$ (par ordre décroissant). Soit $a_i$ un générateur de $A_i$, pour tout $i = 1, \ldots m$. Alors $\xi$ est entièrement décrit par l'image des générateurs $a_i$, $i = 1, \ldots m$. Or $\xi(a_i)$ est une racine $|A_i|^{\text{ième}}$ de l'unité. Par la suite, on décrira $\xi$ par ces racines de l'unité $\xi_{|A_1|}^{s_1} \times \ldots \times \xi_{|A_m|}^{s_m}$ plutôt que par $\xi$.

La dimension $\dim_{\mathbb{C}} S_{H,V}(G)$ ne dépend pas de la caractéristique de $k$. Par contre, un foncteur simple $S_{H,V}$ peut n'apparaître que dans certaines caractéristiques.

A partir de ces calculs, on peut faire un tableau avec les différentes caractéristiques comme colonnes (0 correspondant à toutes les caractéristiques première à $|G|$) et les dimensions des $S_{H,V}(G)$ puis de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | $q$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{H,V}(G)$ | $\ldots$ | ■ | $\ldots$ |
| Somme des dimensions | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |

La case noire correspond au fait que $S_{H,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ en caractéristique $q$ (par exemple).

iv) Grâce au tableau des dimensions du point précédent, on peut comparer la somme des dimensions des $S_{H,V}(G)$ avec la dimension de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ (pour une caractéristique fixée). Si l'on obtient la même chose, c'est que $S_{G,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, pour tout $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple $V$. Sinon $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ pour certain(s) $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module(s) simple(s) $V$. La caractéristique 0 permet de vérifier certains calculs de dimension car on connaît déjà tous les facteurs de composition.

v) Dans le cas où certains $S_{G,V}$ sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$, il reste à déterminer quels sont les $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-modules simples $V$ et combien de fois ils apparaissent. Je n'ai pour cette étape pas de méthode générale. Le seul cas où l'on peut conclure facilement est si $\mathrm{Out}(G) = \mathbf{1}$. Dans ce cas, il n'y a qu'une possibilité pour $V$ et le nombre de fois que $S_{G,V}$ apparaît comme facteur de composition est exactement la différence entre les deux résultats du point précédent.

Dans l'annexe A, j'ai mis les tableaux des dimensions obtenus pour un certain nombre de petits groupes que j'ai traités ainsi.

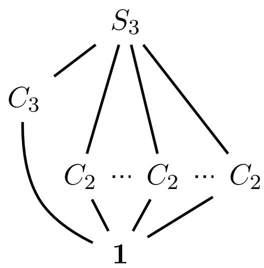
Pour illustrer cette méthode, je vais faire les calculs pour le groupe $S_3$, ce qui permettra de prouver le théorème suivant.

**Théorème 4.14:** *Si $k$ est un corps de caractéristique* 3*, le foncteur simple $S_{S_3,\mathbb{C}}$, où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(S_3)$-module trivial ($\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(S_3) = \mathbf{1}$), est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ de multiplicité* 1.

*Si $k$ est un corps de caractéristique différente de* 3*, le foncteur simple $S_{S_3,\mathbb{C}}$, où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(S_3)$-module trivial, n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$.*

Je suppose que les calculs ont déjà été fait pour les groupes $\mathbf{1}$, $C_2$ et $C_3$ (voir chapitre A).

i) Voici le treillis des sous-groupes de $S_3$ :




| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $S_3$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $S_3$ est un $B$-groupe et $\beta(S_3) = S_3$.

| Classe de conjugaison | Cardinalité | Ordre |
|---|---|---|
| $\{\mathrm{Id}\}$ | 1 | 1 |
| $\{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$ | 3 | 2 |
| $\{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ | 2 | 3 |

ii)

| $\mathrm{car}(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 3 |
| 2 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 2 |
| | $C_2$ | $C_2$ | $\mathbf{1}$ | 1 |
| 3 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 2 |
| | $C_3$ | $G$ | $C_2$ | 2 |

Par conséquent, on a que

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 3 | 3 | 4 |

iii) Grâce à l'annexe A, on peut trouver les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ associé à des sous-quotients propres de $S_3$, c'est-à-dire associé à $\mathbf{1}$, $C_2$ et $C_3$. Les foncteurs simples qui peuvent apparaître (selon la caractéristique) sont $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ et $S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}$. Grâce au théorème 2.67 (et à l'annexe B), on peut déterminer les dimensions de ces foncteurs simples :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| Somme des dimensions | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 3 | 3 | 4 |

iv) On peut remarquer qu'en caractéristique 3, la somme vaut 3 mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = 4$. Par conséquent, en caractéristique 3, il nous manque un foncteur simple de la forme $S_{S_3,V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(S_3)$-module simple (de dimension 1).

v) De fait, $\mathrm{Out}(S_3) = \mathbf{1}$ donc le facteur de composition qui manque ne peut être que $S_{S_3,\mathbb{C}}$, où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\mathbf{1}$-module trivial. Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 3 | 3 | 4 |

## 4.4 Facteurs de composition associés à $C_p \rtimes C_l$ en caractéristique $p$

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. On va prouver le théorème suivant :

**Théorème 4.15:** *On suppose que $k$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k) = p \in \mathbb{P}$. Soit $G = C_p \rtimes C_l$, où $l > 1$ est un nombre premier à $p$ et l'action de $C_l$ sur $C_p$ est fidèle. Alors le foncteur simple $S_{C_p \rtimes C_l, V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_l)$-module simple, est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ si et seulement si $V$ est le module trivial. De plus, la multiplicité de $S_{C_p \rtimes C_l, \mathbb{C}}$ comme facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ est égale à $\varphi(l)$.*

Avant de s'attaquer aux facteurs de composition, on va étudier le groupe $G = C_p \rtimes C_l$. Soient $\alpha$ un générateur de $C_p$ et $\beta$ un générateur de $C_l$. Soit $0 < s < p$ tel que $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^s$. Pour tout $0 \leq i < p$ et pour tout $0 \leq j < l$

$$\beta^j \alpha^i \beta^{-j} = \alpha^{s^j \cdot i}.$$

L'action est fidèle si et seulement si $s$ est d'ordre (multiplicatif) $l$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$. A partir de maintenant, on va supposer que l'action est fidèle. Soient $0 \leq i < p$ et $0 < k < l$. Alors

$$\alpha^i \beta^k \alpha^{-i} = \alpha^{i(1-s^k)} \beta^k.$$

Pour tout $0 < k < l$, $1 - s^k$ n'est pas un multiple de $p$. Par conséquent, lorsque $i$ parcourt $0, 1, 2, \ldots, p-1$, $i(1-s^k)$ parcourt aussi $0, 1, 2, \ldots, p-1$ (à un multiple de $p$ près). Ainsi, la classe de conjugaison de $\beta^k$ est $\{\alpha^i \beta^k | 0 \leq i < p\}$.

Soient $0 < k < p$ et $0 \leq j < l$. Alors

$$\beta^j \alpha^k \beta^{-j} = \alpha^{s^j \cdot k}.$$

Pour tout $0 \leq j < l$, $s^j$ n'est pas un multiple de $p$ et par conséquent $s^j \cdot k$ parcourt $l$ éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ (à un multiple de $p$ près) lorsque $j$ parcourt $0, 1, 2, \ldots, l-1$. Ainsi, dans ce cas, l'ensemble $\{\alpha^i \,\big|\, 0 < i < p\}$ se décompose en $\frac{p-1}{l}$ classe de conjugaison, chacune contenant $l$ éléments.

On va commencer par traiter du cas où $G = C_p \rtimes C_q$ avec $p$ et $q$ des nombres premiers différents. On suppose que l'action de $C_q$ sur $C_p$ est fidèle (donc que $s$ est d'ordre multiplicatif $q$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$).

i) Le groupe $G = C_p \rtimes C_q$ possède comme sous-groupes : $\mathbf{1}$, $C_p$, $p$ sous-groupes $C_q$ (tous conjugués) et $G$. Les classes de conjugaison sont $\{1\}$, $\{\alpha^i \beta^k | 0 \leq i < p\}$ pour tout $1 \leq k < q$ et $\{\alpha^i | 0 < i < p\}$ qui se partage en $\frac{p-1}{q}$ classes de conjugaison, chacune contenant $q$ éléments. Les éléments sont d'ordre 1, $q$ et $p$ respectivement. De plus, $m_{G,G} = m_{G,C_p} = 0$ et $m_{G,\mathbf{1}} = 1$, donc $G$ est un $B$-groupe et $\beta(G) = G$.

ii)

| $\mathrm{car}(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | $\frac{p-1}{q} + q$ |
| $p$ | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | $q$ |
| | $C_p$ | $G$ | $C_q$ | $q$ |
| $q$ | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | $\frac{p-1}{q} + 1$ |
| | $C_q$ | $C_q$ | $\mathbf{1}$ | $1$ |

Par conséquent, on a que

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{q} + q$ | $2q$ | $\frac{p-1}{q} + 2$ |

iii) Grâce à l'annexe A, on peut déterminer les foncteurs simples qui peuvent apparaître (selon la caractéristique) : $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$, $S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}$ $(0 < r < p-1)$ et $S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}$ $(0 < t < q-1)$.

Pour calculer les dimensions de ces foncteurs simples, on va utiliser le théorème 2.67.

Il y a 3 sous-groupes cycliques dans $G$ (à conjugaison près), donc $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G) = 3$.

Il y a un sous-groupe cyclique d'ordre multiple de $p$ (à conjugaison près) : $C_p$. Son normalisateur est $G$. Or l'action de $G$ par conjugaison sur $C_p$ est donnée par $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^s$. Il faut déterminer quand l'image de cette action est contenue dans le noyau de $\xi^r_{p-1}$, pour $0 < r < p-1$. Or l'image et le noyau sont contenus dans le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$, donc il suffit de déterminer pour quelles valeurs de $r$ l'ordre du noyau de $\xi^r_{p-1}$ est un multiple de l'ordre de l'image, qui vaut $q$. Il faut donc déterminer l'ordre du noyau de $\xi^r_{p-1}$. Il est égal à $\mathrm{pgcd}(p-1, r)$. C'est un multiple de $q$ si et seulement si $q$ divise $r$ (car $q$ divise $p-1$). Il y en a $\frac{p-1}{q} - 1$ (on exclut $p-1$). Par conséquent, $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ vaut 1 pour exactement $\frac{p-1}{q} - 1$ valeurs de $r$ et 0 sinon.

Il y a un sous-groupe cyclique d'ordre multiple de $q$ (à conjugaison près) : $C_q$. Son normalisateur est $C_q$ et $C_q$ agit trivialement sur $C_q$ donc l'image est contenue dans le noyau de $\xi^t_{q-1}$, pour tout $0 < t < q-1$. Donc $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ vaut 1 pour tout $0 < t < q-1$.

Voici le tableau qui résume la situation :

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ | 1 | 1 | | $0 < t < q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | 1 | | 1 | $0 < r < p-1, q \mid r$ |
| Somme des dimensions | $\frac{p-1}{q} + q$ | $q+1$ | $\frac{p-1}{q} + 2$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{q} + q$ | $2q$ | $\frac{p-1}{q} + 2$ | |

iv) En caractéristique 0 et $q$, la somme des dimensions est bien égale à la dimension de $\mathrm{pp}_k(G)$. Par contre, en caractéristique $p$, il y a une différence de $\varphi(q) = q-1$. Donc il y a un ou plusieurs foncteurs simples $S_{G,V}$ qui manquent.

v) Il faut déterminer quels sont les $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-modules simples qui apparaissent. De fait, ce sont des sous-quotients de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ donc si $\mathrm{Out}(G)$ agit trivialement sur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$, il agira aussi trivialement sur $V$. Pour commencer, il faut déterminer les éléments de $\mathrm{Out}(G)$. Pour cela, on va commencer par étudier les éléments de $\mathrm{Aut}(G)$.

Soit $\psi : C_p \rtimes C_q \to C_p \rtimes C_q$ un automorphisme de $G$. Étant donnés que $\langle\alpha\rangle$ est l'ensemble des $p$-éléments, cela implique que $\psi(\alpha) = \alpha^r$, où $0 < r < p$. Soient

$0 \leq u < p$ et $0 < v < q$ tels que $\psi(\beta) = \alpha^u \beta^v$. Mais alors :

$$\begin{aligned}
\alpha^{r \cdot s} &= \psi(\alpha^s) \\
&= \psi(\beta \alpha \beta^{-1}) \\
&= \psi(\beta) \psi(\alpha) \psi(\beta)^{-1} \\
&= \alpha^u \beta^v \alpha^r \beta^{-v} \alpha^{-u} \\
&= \alpha^u \alpha^{rs^v} \beta^v \beta^{-v} \alpha^{-u} \\
&= \alpha^{r \cdot s^v}
\end{aligned}$$

Donc $r \cdot s \equiv r \cdot s^v \pmod{p}$. Comme $r$ n'est pas un multiple de $p$, cela implique que $s \equiv s^v \pmod{p}$. Or $0 < v < q$ et l'action est fidèle, donc la seule possibilité est $v = 1$. Ainsi on a que :

$$\begin{aligned}
\psi : G &\longmapsto G \\
\alpha &\longrightarrow \alpha^r \\
\beta &\longrightarrow \alpha^u \beta
\end{aligned}$$

Étant donné que $\beta$ et $\alpha^u \beta$ sont conjugués et que l'on s'intéresse qu'aux automorphismes extérieurs, on peut supposer que $\psi(\beta) = \beta$. De plus, toute application ainsi définie est un automorphisme (extérieur) de $G$.

**Remarque 4.16:** Cela permet de déduire que $\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_q)$ est un groupe cyclique d'ordre $(p-1)/q$.

Maintenant que l'on connaît les automorphismes extérieurs, on va étudier un peu $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$. Il nous faut une base de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Par la remarque 1.18, il suffit de déterminer des représentants des classes d'isomorphisme de $kG$-modules de $p$-permutation indécomposables, ce que l'on peut faire grâce aux résultats de la section 1.5 et de la sous-section 1.5.1. Les seuls vortex possibles sont $\mathbf{1}$ et $C_p$. Soit $V_1, \ldots, V_q$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de $kC_q$-modules irréductibles. Alors l'ensemble

$$\left\{ \mathrm{Ind}_{C_q}^G V_i \,\middle|\, 1 \leq i \leq q \right\} \cup \left\{ \mathrm{Inf}_{G/C_p}^G V_i \,\middle|\, 1 \leq i \leq q \right\}$$

est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$.

On va maintenant étudier l'action de $\psi$ sur les éléments de cette base. L'isomorphisme induit par la restriction de $\psi$ à $C_q$ est $\mathrm{Id}_{C_q}$. Donc, par le proposition 2.6 (et la remarque 2.19), on a

$$\mathrm{Iso}(\psi) \circ \mathrm{Ind}_{C_q}^G V_i = \mathrm{Ind}_{C_q}^G \circ \mathrm{Iso}(\mathrm{Id}_{C_q}) V_i = \mathrm{Ind}_{C_q}^G V_i,$$

pour tout $1 \leq i \leq q$.

De même, l'isomorphisme induit par $\psi$ sur $G/C_p$ est $\mathrm{Id}_{G/C_p}$, donc on a

$$\mathrm{Iso}(\psi) \circ \mathrm{Inf}_{G/C_p}^G V_i = \mathrm{Inf}_{G/C_p}^G \circ \mathrm{Iso}(\mathrm{Id}_{G/C_p}) V_i = \mathrm{Inf}_{G/C_p}^G V_i,$$

pour tout $1 \leq i \leq q$.

Ainsi, quel que soit l'automorphisme $\psi$, son action sur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ est triviale.

Ainsi les foncteurs simples qui manquaient sont $S_{C_p \rtimes C_q, \mathbb{C}}$ qui apparaît $q-1$ fois (où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial). Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | $3$ | $3$ | $3$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi_{q-1}^t}}(G)$ | $1$ | $1$ | | $0 < t < q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi_{p-1}^r}}(G)$ | $1$ | | $1$ | $0 < r < p-1, q \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p \rtimes C_q,\mathbb{C}}(G)$ | | $1$ | | $m_{C_p \rtimes C_q,\mathbb{C}} = q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{q} + q$ | $2q$ | $\frac{p-1}{q} + 2$ | |

**Remarque 4.17:** Dans le raisonnement pour déterminer $V$, on n'a pas utilisé le fait que $q$ est premier, ce qui nous permettra de reprendre ce raisonnement pour le cas général.

On va maintenant traiter le cas général $G = C_p \rtimes C_l$, où $l > 1$ est un nombre entier premier à $p$, en caractéristique $p$. On va faire cela par récurrence sur $l$. Le cas où $l$ est un nombre premier vient être traité.

Soit $l > 1$ un nombre entier composé. On suppose que pour tout $1 < t < l$, si $G = C_p \rtimes C_t$ où $C_t$ agit fidèlement sur $C_p$, le foncteur simple $S_{G,V}$ apparaît comme facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ si et seulement si $V$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial et alors sa multiplicité est égale à $\varphi(t)$.

On ne va pas pouvoir utiliser exactement la même méthode que pour le cas $C_p \rtimes C_q$ car $l$ n'est pas un nombre premier.

i) Les sous-groupes de $G = C_p \rtimes C_l$ sont $C_m$ et $C_p \rtimes C_m$ où $m$ parcourt les diviseurs de $l$ (par contre, ces sous-groupes ne sont pas forcément uniques). Les classes de conjugaison sont $\{1\}$, $\{\alpha^i\beta^k | 0 \leq i < p\}$, pour tout $1 \leq k < l$, et $\{\alpha^i | 0 < i < p\}$ qui se partage en $\frac{p-1}{l}$ classes de conjugaison, chacune contenant $l$ éléments. Les éléments sont d'ordre 1, $\frac{l}{\mathrm{pgcd}(k,l)}$ et $p$ respectivement.

ii)

| $\mathrm{car}(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | $\frac{p-1}{l} + l$ |
| $p$ | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | $l$ |
| | $C_p$ | $G$ | $C_l$ | $l$ |

Par conséquent, on a que

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{l} + l$ | $2l$ |

iii) Les foncteurs simples qui peuvent apparaître (en caractéristique $p$) sont $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $(m,\xi) \in Z_G$ (où $Z_G$ est l'ensemble des paires $(m,\xi)$, où $m$ parcourt les diviseurs de $l$ et $\xi$ les caractères primitifs $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$) et $S_{C_p \rtimes C_m,\mathbb{C}}$, de multiplicité $\varphi(m)$ (où $m$ parcourt les diviseurs de $l$ différents de $l$). Ces derniers foncteurs simples proviennent de l'hypothèse de récurrence.

Étant donné que $l$ est un nombre quelconque, il ne semble pas aisé de déterminer directement $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}(G)$ où $(m,\xi)$ parcourt $Z_G$, et donc nous utilisons une autre méthode. De fait, ces foncteurs simples sont aussi des facteurs de composition en caractéristique 0. La seule différence, c'est qu'en caractéristique 0, il y a aussi les foncteurs $S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}$ $(0 < r < p-1)$. Mais on peut calculer les dimensions pour ces foncteurs ainsi que la somme totale des dimensions en caractéristique 0. En soustrayant le premier au second, on obtiendra exactement $\sum_{(m,\xi)\in Z_G} \dim_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}(G)$.

On commence par déterminer $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$, pour tout $0 < r < p-1$. Par un raisonnement analogue au cas où $l = q$ est un nombre premier, on obtient que $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ vaut 1 pour exactement $\frac{p-1}{l} - 1$ valeurs de $r$ (quand $l \mid r$) et 0 sinon.

De plus, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = \frac{p-1}{l} + l$ donc

$$\sum_{(m,\xi)\in Z_G} \dim_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}(G) = \frac{p-1}{l} + l - \left(\frac{p-1}{l} - 1\right) = l+1.$$

Voici le tableau qui résume la situation :

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | |
|---|---|---|---|
| $\sum_{(m,\xi)\in Z_G} \dim_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}(G)$ | $l+1$ | $l+1$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | $1$ | | $0 < r < p-1, l \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p \rtimes C_m,\mathbb{C}}(G)$ | | $1$ | $m \vert l, m \neq 1, l, \varphi(m)$ fois |
| Somme des dimensions | $\frac{p-1}{l} + l$ | $2l - \varphi(l)$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{l} + l$ | $2l$ | |

en utilisant le fait que

$$\sum_{\substack{m \vert l\\ m\neq 1,l}} \varphi(m) = l - 1 - \varphi(l).$$

iv) En caractéristique $p$, il y a une différence de $\varphi(l)$. Donc il y a un ou plusieurs foncteurs simples $S_{G,V}$ qui manquent.

v) Il faut déterminer quels sont les $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-modules simples qui apparaissent. On peut directement reprendre les calculs de ce point pour $C_p \rtimes C_q$ car on n'a pas utilisé le fait que $q$ est premier.

Ainsi le seul foncteur simple qui manquait est $S_{C_p\rtimes C_l,\mathbb{C}}$, qui apparaît $\varphi(l)$ fois (où $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial). Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | |
|---|---|---|---|
| $\sum_{(m,\xi)\in Z_G} \dim_{\mathbb{C}} S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}(G)$ | $l+1$ | $l+1$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | $1$ | | $0 < r < p-1, l \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p \rtimes C_m,\mathbb{C}}(G)$ | | $1$ | $m \vert l, m \neq 1, \varphi(m)$ fois |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{l} + l$ | $2l$ | |

## 4.5 Facteurs de composition de quelques petits groupes

### 4.5.1 Le groupe $C_3 \rtimes C_4$

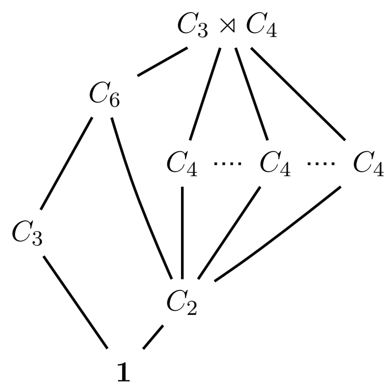
Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. On va s'intéresser au groupe $C_3 \rtimes C_4$ qui est le plus petit groupe de la forme $C_p \rtimes C_l$ où l'on peut avoir une action non-triviale et non-fidèle.

Soient $G = C_3 \rtimes C_4$, $\alpha$ un générateur de $C_3$ et $\beta$ un générateur de $C_4$. L'action de $C_4$ sur $C_3$ est définie par $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$. On veut déterminer si $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (pour certains $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module $V$ qui restent à déterminer).

**Théorème 4.18:** *Si $k$ est un corps de caractéristique 3, alors il existe un unique $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_3 \rtimes C_4)$-module simple $V$ tel que $S_{C_3\rtimes C_4,V}$ soit un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. De plus $V$ est de dimension 1 et la multiplicité de $S_{C_3\rtimes C_4,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

*Si $k$ est un corps de caractéristique différente de 3, alors $S_{C_3\rtimes C_4,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$, pour tout $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_3 \rtimes C_4)$-module simple $V$.*

i) Le treillis des sous-groupes de $G$ est :




| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_3 \rtimes C_4$ | 0 |
| $C_6$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Donc $C_3 \rtimes C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_3 \rtimes C_4) = S_3$.

| Classe de conjugaison | Cardinalité | Ordre |
|---|---|---|
| $\{1\}$ | 1 | 1 |
| $\{\beta^2\}$ | 1 | 2 |
| $\{\alpha, \alpha^{-1}\}$ | 2 | 3 |
| $\{\beta, \alpha\beta, \alpha^{-1}\beta\}$ | 3 | 4 |
| $\{\beta^{-1}, \alpha\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ | 3 | 4 |
| $\{\alpha\beta^2, \alpha^{-1}\beta^2\}$ | 2 | 6 |

ii)

| $\mathrm{car}(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 6 |
| 2 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 2 |
| | $C_2$ | $G$ | $S_3$ | 2 |
| | $C_4$ | $C_4$ | $\mathbf{1}$ | 1 |
| 3 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 4 |
| | $C_3$ | $G$ | $C_4$ | 4 |

Par conséquent, on a que

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 5 | 8 |

iii) Les foncteurs simples qui peuvent apparaître (selon la caractéristique) sont $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$, $S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}$, $S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}$ et $S_{S_3,\mathbb{C}}$, dont les dimensions sont :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| Somme des dimensions | 6 | 5 | 7 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 5 | 8 |

iv) On peut remarquer qu'en caractéristique 3, la somme vaut 7 mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = 8$. Par conséquent, en caractéristique 3, il nous manque un foncteur simple de la forme $S_{C_3 \rtimes C_4,V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_3 \rtimes C_4)$-module simple de dimension 1.

v) Malheureusement, $\mathrm{Out}(G)$ contient deux éléments (les images de l'identité et de l'application $\alpha \mapsto \alpha$, $\beta \mapsto \beta^{-1}$), donc on ne peut pas (facilement) déterminer ce que vaut $V$. Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3 \rtimes C_4,V}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 5 | 8 |

où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple de dimension 1 qui reste à déterminer.

### 4.5.2 Le groupe $C_5 \rtimes C_4$

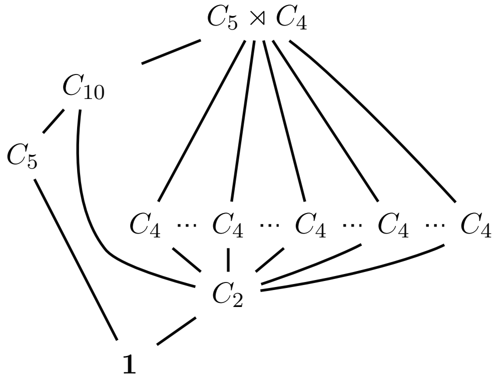
Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. On va s'intéresser au groupe $C_5 \rtimes C_4$ où l'action de $C_4$ sur $C_5$ n'est pas fidèle ni triviale.

Soient $G = C_5 \rtimes C_4$, $\alpha$ un générateur de $C_5$ et $\beta$ un générateur de $C_4$. L'action de $C_4$ sur $C_5$ est défini par $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$. On veut déterminer si $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (pour certains $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module $V$ qui restent à déterminer).

**Théorème 4.19:** *Si $k$ est un corps de caractéristique 5, alors il existe un unique $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_5 \rtimes C_4)$-module simple $V$ tel que $S_{C_5 \rtimes C_4,V}$ soit un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. De plus $V$ est de dimension 1 et la multiplicité de $S_{C_5 \rtimes C_4,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

*Si $k$ est un corps de caractéristique différente de 5, alors $S_{C_5 \rtimes C_4,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$, pour tout $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_5 \rtimes C_4)$-module simple $V$.*

i) Le treillis des sous-groupes de $G$ est :




| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_5 \rtimes C_4$ | 0 |
| $C_{10}$ | 0 |
| $C_5$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Donc $C_5 \rtimes C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_5 \rtimes C_4) = D_{10}$.

| Classe de conjugaison | Cardinalité | Ordre |
|---|---|---|
| $\{1\}$ | 1 | 1 |
| $\{\beta^2\}$ | 1 | 2 |
| $\{\alpha, \alpha^{-1}\}$ | 2 | 5 |
| $\{\alpha^2, \alpha^{-2}\}$ | 2 | 5 |
| $\{\beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^{-2}\beta, \alpha^{-1}\beta\}$ | 5 | 4 |
| $\{\beta^{-1}, \alpha\beta^{-1}, \alpha^2\beta^{-1}, \alpha^{-2}\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ | 5 | 4 |
| $\{\alpha\beta^2, \alpha^{-1}\beta^2\}$ | 2 | 10 |
| $\{\alpha^2\beta^2, \alpha^{-2}\beta^2\}$ | 2 | 10 |

ii)

| car$(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 8 |
| 2 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 3 |
| | $C_2$ | $G$ | $D_{10}$ | 3 |
| | $C_4$ | $C_4$ | $\mathbf{1}$ | 1 |
| 5 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 4 |
| | $C_5$ | $G$ | $C_4$ | 4 |

Par conséquent, on a que

| car$(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 7 | 8 |

iii) Les foncteurs simples qui peuvent apparaître (selon la caractéristique) sont $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$, $S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}$, $S_{C_5,\xi_4^r}$, $0 < r < 4$ et $S_{D_{10},\mathbb{C}}$, dont les dimensions sont :

| car($k$) | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| Somme des dimensions | 8 | 7 | 7 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 7 | 8 |

iv) On peut remarquer qu'en caractéristique 5, la somme vaut 7 mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = 8$. Par conséquent, en caractéristique 5, il nous manque un foncteur simple de la forme $S_{C_5 \rtimes C_4, V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_5 \rtimes C_4)$-module simple de dimension 1.

v) Malheureusement, $\mathrm{Out}(G)$ contient deux éléments (les images de l'identité et de l'application $\alpha \mapsto \alpha$, $\beta \mapsto \beta^{-1}$), donc on ne peut pas (facilement) déterminer ce que vaut $V$. Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| car($k$) | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5 \rtimes C_4,V}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 7 | 8 |

où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple de dimension 1 qui reste à déterminer.

### 4.5.3 Le groupe $C_p \rtimes C_4$

Soit $p$ un nombre premier impair. Soit alors $G = C_p \rtimes C_4$ le groupe dont l'action de $C_4 = \langle \beta \rangle$ sur $C_p = \langle \alpha \rangle$ est définie par :

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}.$$

Par des calculs analogues aux deux cas précédents, on obtient le tableau des dimensions suivants :

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | $p$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi_{p-1}^r}}(G)$ | 2 | 2 | | $0 < r < p-1, 2 \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{2p},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 | |
| Somme des dimensions | $p+3$ | $p+2$ | 7 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $p+3$ | $p+2$ | 8 | |

Par conséquent, on a que

**Théorème 4.20:** *Si $k$ est un corps de caractéristique $p$ alors il existe un unique $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_4)$-module simple $V$ tel que $S_{C_p \rtimes C_4,V}$ soit un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. De plus $V$ est de dimension 1 et la multiplicité de $S_{C_p \rtimes C_4,V}$ comme facteur de composition est égale à 1.*

*Si $k$ est un corps de caractéristique différente de $p$, alors $S_{C_p \rtimes C_4,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$, pour tout $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_4)$-module simple $V$.*

**Remarque 4.21:** Dans la section 4.4 (pages 49-50), on peut montrer que $\mathrm{Out}(G)$ agit trivialement sur $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$. Malheureusement cet argument ne peut pas s'appliquer de la même manière ici. Par conséquent, il reste à déterminer quel est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_4)$-module simple $V$ qui apparaît dans le théorème précédent.

### 4.5.4 Le groupe alterné $A_4 = (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$

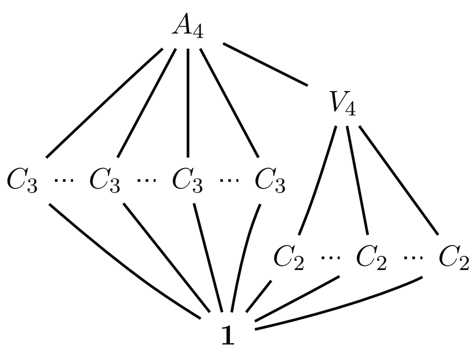
Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. On va s'intéresser au groupe alterné $A_4$.

Soit $G = A_4$. On veut déterminer si $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ (pour certains $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module $V$ qui restent à déterminer).

**Théorème 4.22:** *Si $k$ est un corps de caractéristique 2, alors il existe deux $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-module simple $V_1$ et $V_2$ ($V_1$ et $V_2$ pouvant être isomorphes) tels que $S_{A_4,V_1}$ et $S_{A_4,V_2}$ soient des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$. Leur multiplicité comme facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ est égale à 1 si $V_1 \ncong V_2$ et 2 sinon.*

*Si $k$ est un corps de caractéristique différente de 2, alors $S_{A_4,V}$ n'est pas un facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$, pour tout $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-module simple $V$.*

i) Le treillis des sous-groupes de $G$ est :




| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $A_4$ | 0 |
| $V_4$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Donc $A_4$ est un $B$-groupe et $\beta(A_4) = A_4$.

| Classe de conjugaison | Cardinalité | Ordre |
|---|---|---|
| $\{1\}$ | 1 | 1 |
| $\{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ | 3 | 2 |
| $\{(1\,2\,3), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (2\,4\,3)\}$ | 4 | 3 |
| $\{(1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4)\}$ | 4 | 3 |

ii)

| car$(k)$ | $D$ | $N_G(D)$ | $N_G(D)/D$ | $\ell(N_G(D)/D)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 4 |
| 2 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 3 |
| | $C_2$ | $V_4$ | $C_2$ | 1 |
| | $V_4$ | $G$ | $C_3$ | 3 |
| 3 | $\mathbf{1}$ | $G$ | $G$ | 2 |
| | $C_3$ | $C_3$ | $\mathbf{1}$ | 1 |

Par conséquent, on a que

| car$(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 7 | 3 |

iii) Les foncteurs simples qui peuvent apparaître (selon la caractéristique) sont $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$, $S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}$ et $S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}$, dont les dimensions sont :

| car$(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | |
| Somme des dimensions | 4 | 5 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 7 | 3 |

iv) On peut remarquer qu'en caractéristique 2, la somme vaut 5 mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G) = 7$. Par conséquent, en caractéristique 2, il nous manque un ou deux foncteurs simples de la forme $S_{A_4,V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-module simple de dimension 1 ou 2.

v) Malheureusement, $\mathrm{Out}(G)$ contient deux éléments, donc on ne peut pas (facilement) déterminer ce que vaut $V$. Par contre, comme $\mathrm{Out}(A_4) \cong C_2$, on peut quand même conclure que les $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-modules simples qui manquent sont de dimension 1. Par conséquent, le tableau complet des dimensions est :

| car$(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{A_4,V_1}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{A_4,V_2}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 7 | 3 |

où $V_1$ et $V_2$ sont des $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-modules simples de dimension 1 qui restent à déterminer (non nécessairement distincts).

**Conjecture 4.23:** *Dans le théorème 4.22, les $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-modules simples $V_1$ et $V_2$ sont le module trivial.*

## 4.6 Conclusion

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. Si $p = 0$, par la section 4.1.1, le foncteur $\mathbb{C}\,pp_k$ est isomorphe au foncteur $\mathbb{C}R_{\mathbb{C}}$. Alors, par le théorème 2.64, on connaît tous les facteurs de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ (ainsi qu'une décomposition en somme directe de foncteurs simples). On suppose maintenant que $p \in \mathbb{P}$.

Les différents calculs de ce chapitre permet de dire que les foncteurs simples suivants sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ :

- Théorème 4.11 : Les foncteurs simples $S_{C_m,\mathbb{C}_\xi}$ et $S_{C_p\times C_p\times C_m,\mathbb{C}_\xi}$, où $(m,\xi)$ parcourt l'ensemble des paires constituées d'un entier positif $m$ premier à $p$ et d'un caractère primitif $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$. Leur multiplicité comme facteur de composition est égale à 1.
- Théorème 4.15 : Les foncteurs simples $S_{C_p\rtimes C_l,\mathbb{C}}$, où $l$ est un nombre premier à $p$, l'action de $C_l$ sur $C_p$ est fidèle et $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_l)$-module trivial. Leur multiplicité comme facteur de composition est égale à $\varphi(l)$.
- Théorème 4.7 : Les foncteurs simples $S_{G,\mathbb{C}}$, où $G$ est un $B$-groupe fini $p$-hypo-élémentaire et $\mathbb{C}$ le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module trivial. A part pour le cas précédent, leur multiplicité n'est pas connue.
- Théorème 4.20 : En caractéristique $p$, le foncteur simple $S_{C_p\rtimes C_4,V}$, où l'action de $C_4$ sur $C_p$ est non-fidèle et non-triviale et $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_p \rtimes C_4)$-module simple de dimension 1 qui reste à déterminer.
- Théorème 4.22 : En caractéristique 2, les foncteurs simples $S_{A_4,V_1}$ et $S_{A_4,V_1}$, où $V_1$ et $V_2$ sont des $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-modules simples qui restent à déterminer (non nécessairement distincts).

Les deux derniers points permettent de penser qu'il manque encore un certain nombre de facteurs de composition. En autre, voici quelques idées de facteurs de composition qui pourraient apparaître :

**Conjecture 4.24:** *Si $k$ est un corps de caractéristique $p$ et $G = P \rtimes C_l$ est un $B$-groupe fini $p$-hypo-élémentaire, alors le foncteur simple $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ si et seulement si $V$ est le module trivial. De plus, la multiplicité du foncteur simple $S_{G,\mathbb{C}}$ comme facteur de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ est égale à $\varphi(l)$.*

**Remarque 4.25:** Par le théorème 4.7, on sait déjà que ces foncteurs simples sont des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ de multiplicité au moins 1. De plus, si $P = C_p$, on sait que le résultat est correct par le théorème 4.15.

**Conjecture 4.26:** *Si $k$ est un corps de caractéristique $p$ et $G = C_p \rtimes C_l$, alors le foncteur simple $S_{G,V}$ est un facteur de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ de multiplicité égale à $\varphi(m)$, où $m = l/d$ et $d$ est la cardinalité du noyau de l'action de $C_l$ sur $C_p$. De plus, il reste à déterminer le $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module simple $V$.*

**Remarque 4.27:** Dans le cas où l'action de $C_l$ sur $C_p$ est fidèle, on sait par le théorème 4.15 que c'est vrai si $V$ est le module trivial. C'est aussi le cas pour les groupes $C_p \rtimes C_4$ (théorème 4.20).

# Chapitre 5

# Compléments sur les $B$-groupes

Soit $p$ un nombre premier. Le but de ce chapitre est d'étudier les $B$-groupes de la forme $P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble. Pour cela, on va commencer par un certain nombre de résultat très généraux. Puis on étudiera quelques cas particuliers dont le cas des groupes $p$-hypo-élémentaires.

**Proposition 5.1:** [Bou10, proposition 5.6.4, page 92]
*Soit $G$ un groupe fini. Si $N$ est un sous-groupe normal abélien minimal de $G$, alors*

$$m_{G,N} = 1 - \frac{|K_G(N)|}{|N|},$$

*où $K_G(N)$ est l'ensemble des compléments de $N$ dans $G$.*

*En particulier, si le groupe $G$ est résoluble, alors $G$ est un $B$-groupe si et seulement si $|K_G(N)| = |N|$ pour tout sous-groupe normal minimal $N$ de $G$.*

**Remarque 5.2:** Les groupes de la forme $P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe et $H$ un $p'$-groupe résoluble sont résolubles, ainsi on pourra utiliser la seconde partie de la proposition précédente pour déterminer lesquels de ces groupes sont des $B$-groupes.

Soit $G = P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble. Notre but est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $G$ soit un $B$-groupe. Soient $p^m$ l'ordre de $P$ et $n$ l'ordre de $H$. Les notations introduites ici seront gardées dans le reste du chapitre.

**Proposition 5.3:** *Le sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ de $G$ contient $\Phi(P)$.*

*Démonstration.* Soit $M$ un sous-groupe maximal de $G$. On doit montrer que $\Phi(P)$ est contenu dans $M$. Clairement, $P$ est l'unique $p$-sous-groupe de Sylow de $G$, et par conséquent $P$ est l'ensemble des $p$-éléments de $G$. Ainsi, si on pose $S = M \cap P$, alors $S$ est un $p$-sous-groupe de Sylow normal de $M$. Si $S = P$, alors il est clair que $\Phi(P) \subseteq P \subseteq M$, donc on peut supposer que $S \neq P$. Comme $\Phi(P)$ est un sous-groupe caractéristique de $P$ et que $P$ est un sous-groupe normal de $G$, $G$ normalise $\Phi(P)$. Par conséquent, $\Phi(P) \cdot S$ et $\Phi(P) \cdot M$ sont des sous-groupes. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
P \arrow[dr, dash] & & \Phi(P)\cdot M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \Phi(P)\cdot S \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\
\Phi(P) & & S &
\end{tikzcd}$$

Comme $M$ est maximal, on a que $\Phi(P)\cdot M$ est soit $M$, soit $G$. Mais

$$(\Phi(P)\cdot M)\cap P = \Phi(P)\cdot S \neq P$$

(car $S \neq P$) donc $\Phi(P)\cdot M$ doit être $M$, ce qui implique que $\Phi(P) \subseteq M$. □

**Corollaire 5.4:** *Si $G$ est un $B$-groupe, alors $P$ est un groupe abélien élémentaire.*

*Démonstration.* Ceci est une conséquence de la proposition 5.3 et de la remarque 2.53. □

Ainsi, à partir de maintenant, on suppose que $P$ est un groupe abélien élémentaire. Ainsi $P$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel sur lequel $H$ agit, c'est-à-dire un $\mathbb{F}_pH$-module (de génération finie). Comme $H$ est un $p'$-groupe, $P$ est un module semi-simple.

Si $N$ est un sous-groupe normal minimal de $G$ alors soit $N\cap P = \mathbf{1}$ soit $N \cap P \neq \mathbf{1}$ et alors $N$ est contenu dans $P$ (par minimalité de $N$). On va commencer par étudier les sous-groupes normaux minimaux contenus dans $P$.

**Proposition 5.5:** *Soit $N$ un sous-groupe normal de $G$ contenu dans $P$. Alors tout complément de $N$ dans $G$ est de la forme $S \rtimes Q$, où $S$ est un sous-groupe normal de $G$ qui est un complément de $N$ dans $P$ et $Q$ est un sous-groupe de $G$ conjugué à $H$.*

*Démonstration.* Soit $C$ un complément de $N$ dans $G$ (c'est-à-dire $N \cap C = \mathbf{1}$ et $N\cdot C = G$). On définit $S = C\cap P$, qui est un $p$-sous-groupe de Sylow normal de $C$. Par le théorème de Schur-Zassenhaus ([Rot95], théorème 7.41), il existe un sous-groupe $Q$ de $C$ tel que $C = S \rtimes Q$. On peut remarquer que l'ordre de $Q$ est $n$ donc $Q$ est conjugué à $H$ dans $G$ (par la seconde partie du théorème de Schur-Zassenhaus, [Rot95], théorème 7.42). Mais $S$ est normal dans $C$ et dans $P$ (qui est abélien) donc aussi dans $G = P\rtimes Q$.

Réciproquement, soient $C = S\rtimes Q$ tel que $S$ soit un sous-groupe normal de $G$ et un complément de $N$ dans $P$ et $Q$ est un sous-groupe de $G$ d'ordre $n$ (c'est-à-dire conjugué à $H$). Clairement, on a que $N\cap C = N\cap S = \mathbf{1}$ et

$$N\cdot C = N\cdot (S\rtimes Q) = (N\cdot S)\rtimes Q = P\rtimes Q = G.$$

ce qui prouve que $C$ est un complément de $N$ dans $G$. □

Comme $P$ est un $\mathbb{F}_pH$-module semi-simple, on peut le décomposer en ses composantes isotypiques (voir [CR81], pages 46-47 pour une définition) :

$$P \cong \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$$

et pour chaque composante isotypique $P_i$, il existe un $\mathbb{F}_pH$-module simple $S_i$ et un entier $m_i$ tels que

$$P_i \cong \bigoplus_{j=1}^{m_i} S_i.$$

On peut supposer que $S_1$ est le $\mathbb{F}_pH$-module trivial (si nécessaire, on ajoute $P_1 = \{0\}$). Pour tout $1 \leq i \leq t$, il existe un entier $s_i$ tel que $|S_i| = p^{s_i}$.

On peut maintenant chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre de compléments d'un sous-groupe normal minimal $N$ de $G$ contenu dans $P$ soit égal à $|N|$.

Soit $N$ un sous-groupe normal minimal de $G$ contenu dans $P$. C'est un $\mathbb{F}_pH$-sous-module de $P$ (car c'est un sous-groupe normal de $G$). De plus, la minimalité de $N$ implique que c'est un module simple et donc il existe un entier $1 \leq l \leq t$ tel que $N \cong S_l$. Alors $N$ est un sous-module de $P_l$. On sait par la proposition 5.5 qu'un complément de $N$ dans $G$ est de la forme $C \rtimes Q$, où $C$ est un sous-groupe normal de $G$ qui est un complément de $N$ dans $P$ et $Q$ est un sous-groupe de $G$ conjugué à $H$. Ainsi $C$ est un complément de $N$ dans $P$ comme groupe mais aussi comme $\mathbb{F}_pH$-module. La première étape va être de déterminer le nombre de possibilités pour $C$. Pour cela, on va utiliser le fait que les composantes isotypiques sont uniques à isomorphisme près ([CR81], pages 46-47), ce qui implique que tout complément de $N$ dans $P$ (comme module) est de la forme :

$$H_l \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{l} P_i,$$

où $H_l$ est un complément de $N$ dans $P_l$ (comme module).

Par le théorème de Wedderburn ([Ben04], théorème 1.3.5, page 6),

$$\mathbb{F}_pH \cong \bigoplus_{i=1}^{t} M_{n_i}(F_i),$$

où $F_i$ est une extension finie de $\mathbb{F}_p$, donc isomorphe à $\mathbb{F}_{p^{k_i}}$ pour un certain $k_i \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que le module simple $S_i$ est associé à $M_{n_i}(F_i)$ (et donc $k_i \cdot n_i = s_i$), pour tout $1 \leq i \leq t$. Mais alors $S_l$ et $P_l$ sont des $M_{n_l}(F_l)$-module. Or on a une équivalence de Morita (voir page 65 ainsi que la proposition 9.4 page 67 de [Thé95]) entre $M_{n_l}(F_l)$-mod et $F_l$-mod, donnée par :

$$\begin{array}{lcl} M_{n_l}(F_l)\text{-mod} & \longrightarrow & F_l\text{-mod} \\ M & \longmapsto & S_l^\star \otimes_{M_{n_l}(F_l)} M \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} F_l\text{-mod} & \longrightarrow & M_{n_l}(F_l)\text{-mod} \\ M & \longmapsto & S_l \otimes_{F_l} M. \end{array}$$

En particulier $S_l$ et $P_l$ correspondent à $F_l$ et $F_l^{m_l}$ respectivement et par conséquent, pour trouver le nombre de compléments de $S_l$ dans $P_l$, il suffit de trouver le nombre de compléments de $F_l$ dans $F_l^{m_l}$ (comme $F_l$-espace vectoriel). Étant donné que $F_l \cong \mathbb{F}_{p^{k_l}}$ est fini, c'est un exercice facile de déterminer le nombre de compléments de $F_l$ dans $F_l^{m_l}$ :

$$p^{k_l(m_l-1)}.$$

Par conséquent $N$ a $p^{k_l(m_l-1)}$ compléments dans $P_l$ et donc dans $P$.

Comme tout complément de $N$ dans $P$ est de la forme $C \rtimes Q$ et que l'on connaît le nombre de possibilités pour $C$, il reste à trouver le nombre de possibilités pour $Q$ (quand $C$ est fixé). Pour $C$ fixé, le nombre de sous-groupes de la forme $C \rtimes Q$ est égal au nombre de compléments $Q$ de $P$ dans $G = P \rtimes H$ divisé par le nombre de compléments de $C$ dans $C \rtimes H$. Pour faire ce calcul, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.6:** *Le nombre de compléments de $P$ dans $G$ est égal $p^{m-m_1}$.*

*Démonstration.* Soit $E$ l'ensemble des compléments de $P$ dans $G$. Par le théorème de Schur-Zassenhaus ([Rot95], théorème 7.42), on sait que $P$ agit transitivement sur $E$. Soit $S$ le stabilisateur de $H$ dans $P$. Alors le nombre de sous-groupes conjugués à $H$ est égal à $|P|/|S|$. Donc pour pouvoir conclure, il suffit de trouver l'ordre de $S$. Il est facile de trouver que $S = P_1$ et donc que le nombre de sous-groupes conjugués à $H$ est $p^{m-m_1}$. $\square$

Cela nous donne les deux nombres à diviser : Le nombre de compléments de $P$ dans $G$ est $p^{m-m_1}$ et le nombre de compléments de $C$ dans $C \rtimes H$ est :

$$\begin{cases} p^{m-s_1-(m_1-1)} = p^{m-m_1} & \text{si } l = 1, \\ p^{m-s_l-m_1} & \text{si } l \neq 1. \end{cases}$$

Ainsi, le nombre de possibilités pour $C \rtimes Q$ (pour $C$ fixé) est :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } l = 1, \\ p^{s_l} & \text{si } l \neq 1. \end{cases}$$

Pour conclure, le nombre de compléments de $N$ dans $G$ est :

$$\begin{cases} p^{m_1-1} & \text{si } l = 1, \\ p^{s_l+k_l(m_l-1)} & \text{si } l \neq 1. \end{cases}$$

Mais pour que $G$ puisse être un $B$-groupe, il faut que le nombre de compléments de $N$ soit $|N| = p^{s_l}$. Ainsi, si $l = 1$, $m_1 = 2$ (ou $m_1 = 0$ si $P_1 = \{0\}$) et si $l \neq 1$, alors $k_l(m_l - 1) = 0$, ce qui implique que $m_l = 1$ car $k_l > 0$.

Ainsi, on a le résultat suivant :

**Théorème 5.7:** *Soit $G \cong P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble. Alors $G$ est un $B$-groupe si et seulement si :*

*i) $P$ est abélien élémentaire ;*

*ii) Dans une décomposition de $P$ en somme directe de $\mathbb{F}_pH$-modules simples, tout $\mathbb{F}_pH$-module simple apparaît au plus une fois, excepté le module trivial, qui apparaît 0 ou 2 fois ;*

*iii)* *Pour tout sous-groupe normal minimal $N$ de $G$ contenu dans $H$, le nombre de compléments de $N$ dans $H$ est égal à $|N|$.*

*Démonstration.* La seule partie à prouver concerne le point *iii*). Soit $N$ un sous-groupe normal minimal de $G$ tel que $N \cap P = \mathbf{1}$. Alors $N$ est contenu dans un sous-groupe de $G$ conjugué à $H$. Il suffit donc de prouver le résultat pour le cas où $N$ est un sous-groupe de $H$ (par conjugaison, cela sera alors vrai aussi pour les conjugués de $H$). Il faut montrer que le nombre de compléments de $N$ dans $G$ est égal au nombre de compléments de $N$ dans $H$. Or tout complément de $N$ dans $G$ sera de la forme $P \rtimes Q$, où $Q$ est un complément de $N$ dans $H$, ce qui permet de conclure. □

## 5.1 Les groupes $P \rtimes H$ où $H$ est un $B$-groupe résoluble

Soit $G = P \rtimes H$ où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble qui est de plus un $B$-groupe. Alors la troisième condition du théorème 5.7 est toujours satisfaite car $H$ est un $B$-groupe (proposition 5.1). Ainsi, on a le résultat suivant :

**Théorème 5.8:** *Soit $G \cong P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble qui est un $B$-groupe. Alors $G$ est un $B$-groupe si et seulement si :*

*i)* *$P$ est abélien élémentaire ;*

*ii)* *Dans une décomposition de $P$ en somme directe de $\mathbb{F}_pH$-modules simples, tout $\mathbb{F}_pH$-module simple apparaît au plus une fois, excepté le module trivial, qui apparaît $0$ ou $2$ fois.*

## 5.2 Les groupes $P \rtimes H$ où l'action de $H$ sur $P$ est fidèle

Soit $G \cong P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini et $H$ un $p'$-groupe fini résoluble. On suppose de plus que l'action de $H$ sur $P$ est fidèle. On veut déterminer les conditions pour que $G$ soit un $B$-groupe. Par le corollaire 5.4, on peut donc supposer que $P$ est abélien élémentaire.

**Lemme 5.9:** *Soit $G$ un groupe fini et soient $H$, $K$ et $L$ des sous-groupes de $G$ tels que $H \leq K \leq H \cdot L$. Alors $K = H(K \cap L)$.*

*Démonstration.* Trivial □

**Proposition 5.10:** *Si l'action de $H$ sur $P$ est fidèle, alors tout sous-groupe normal minimal $N$ de $G$ est contenu dans $P$.*

*Démonstration.* Soit un sous-groupe normal minimal (non-trivial) $N$ de $G$. Si $N \cap P \neq \mathbf{1}$, alors par minimalité de $N$, on a que $N \subseteq P$. On peut donc maintenant supposer que $N \cap P = \mathbf{1}$. Alors, comme $N$ et $P$ sont normaux dans $G$, $[N, P] = \mathbf{1}$, ce qui implique que $N \subseteq C_G(P)$.

On a que $P \leq C_G(P) \leq P \cdot H$ donc par le lemme 5.9, on a que

$$C_G(P) = P \cdot (C_G(P) \cap H) = P \cdot C_H(P).$$

Mais $H$ agit fidèlement sur $P$ donc $C_H(P) = \mathbf{1}$ et donc $N \subseteq C_G(P) = P$. Cela est impossible car cela implique que $N = \mathbf{1}$, ce qui est une contradiction. □

Par conséquent, on a le résultat suivant :

**Théorème 5.11:** *Soit $G \cong P \rtimes H$, où $P$ est un $p$-groupe fini, $H$ un $p'$-groupe fini résoluble et l'action de $H$ sur $P$ est fidèle. Alors $G$ est un $B$-groupe si et seulement si :*

*i) $P$ est abélien élémentaire ;*

*ii) Dans une décomposition de $P$ en somme directe de $\mathbb{F}_pH$-modules simples, tout $\mathbb{F}_pH$-module simple apparaît au plus une fois, excepté le module trivial, qui apparaît $0$ ou $2$ fois.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 5.7 et de la proposition précédente. □

### 5.2.1 Les groupes $p$-hypo-élémentaires

A partir de maintenant, on va considérer que $H$ est un groupe cyclique $C_n$ : soit $G \cong P \rtimes C_n$ un groupe fini $p$-hypo-élémentaire (c'est-à-dire que $n$ est premier à $p$).

**Proposition 5.12:** *Si $G$ est un $B$-groupe, alors le groupe $C_n$ agit fidèlement sur $P$.*

*Démonstration.* Le cas $n = 1$ est clair, donc on va supposer que $n \geq 2$. Soit $d$ le diviseur de $n$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi = C_d$, où $\varphi : C_n \to \operatorname{Aut}(P)$ est l'action de $C_n$ sur $P$. Pour montrer que l'action est fidèle, il suffit de montrer que $d = 1$.

On va donc supposer que $d > 1$. Comme $C_d$ agit trivialement sur $P$ et que $C_n$ est abélien, $C_d$ est un sous-groupe central de $G$ et donc en particulier, c'est un sous-groupe normal. Comme $d > 1$, il existe un sous-groupe normal minimal $N$ de $C_d$ (qui est même central). Mais alors $N$ a au plus un complément dans $G$ : Si $C$ est un complément de $N$ dans $G$, alors $C$ contient l'unique $p$-sous-groupe de Sylow $P$ de $G$. Par conséquent, on a que $C = P \rtimes L$, où $L$ est un sous-groupe de $C_n$. Mais alors $L$ est un complément de $N$ dans $C_n$, qui est cyclique, et donc il y a au plus une possibilité pour $L$.

Mais $N$ doit avoir $|N| > 1$ compléments dans $G$ car c'est un $B$-groupe (proposition 5.1). C'est une contradiction et donc $d = 1$ et l'action est fidèle. □

Alors on a le résultat suivant :

**Théorème 5.13:** *Soit $G \cong P \rtimes C_n$ un groupe fini $p$-hypo-élémentaire. Alors $G$ est un $B$-groupe si et seulement si :*

*i) $P$ est abélien élémentaire ;*

*ii) Dans une décomposition de $P$ en somme directe de $\mathbb{F}_pC_n$-modules simples, tout $\mathbb{F}_pC_n$-module simple apparaît au plus une fois, excepté le module trivial, qui apparaît $0$ ou $2$ fois ;*

*iii) L'action de $C_n$ sur $P$ est fidèle.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 5.11 et de la proposition précédente. □

# Annexe A

# Tables des dimensions pour quelques petits groupes

Soit $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(k)$. Voici quelques résultats pour des petits groupes $G$ :

- Le treillis des sous-groupes de $G$ (sauf pour les cas trop compliqués) ;
- Les nombres $m_{G,N}$ ainsi que le $B$-groupe $\beta(G)$ associé à $G$ (sauf pour les cas trop compliqués) ;
- La table de dimensions que j'ai obtenu en appliquant la méthode décrite dans la section 4.3. Pour rappel, $\mathrm{car}(k) = 0$ correspond à toutes les caractéristiques premières à $|G|$ et un carré noir veut dire que le foncteur simple n'apparaît pas dans cette caractéristique ;
- La liste des facteurs de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ de la forme $S_{G,V}$, où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(G)$-module, avec leur multiplicité.

## $\mathbf{G = 1}$

$\mathbf{1}$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $\mathbf{1}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$).

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 |
|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 1 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}$ | 1 | |

## $\mathbf{G = C_2}$

$$\begin{array}{c} C_2 \\ | \\ \mathbf{1} \end{array}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_2) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 2 | 2 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_2$.

## $\mathbf{G = C_3}$

$$\begin{array}{c} C_3 \\ | \\ \mathbf{1} \end{array}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_3$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_3) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 3 | 2 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3$ |

## $\mathbf{G = C_4}$

$$\begin{array}{c} C_4 \\ | \\ C_2 \\ | \\ \mathbf{1} \end{array}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_4$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_2$ | $1$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_4) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 3 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2$ |

## $\mathbf{G = C_2 \times C_2}$

$$\begin{tikzcd}
& C_2 \times C_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
C_2 \arrow[dr, dash] & C_2 \arrow[d, dash] & C_2 \arrow[dl, dash] \\
& \mathbf{1} &
\end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_2$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_2 \times C_2$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(C_2 \times C_2) = C_2 \times C_2$).

---

| car($k$) | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 5 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_2\times 2,\mathbb{C}}$ | 1 | $= 2$ |

## $\mathbf{G = C_5}$

$$\begin{tikzcd}
C_5 \arrow[d, dash] \\
\mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_5$ | $\frac{4}{5}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_5$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_5) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 2 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}$ | 1 | $\neq 5$ |
| $S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}$ | 1 | $\neq 5$ |
| $S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}$ | 1 | $\neq 5$ |

## $\mathbf{G = C_6}$

$$\begin{tikzcd}
& C_6 \arrow[dl, dash] \arrow[ddr, dash] & \\
C_3 \arrow[ddr, dash] & & \\
& & C_2 \arrow[dl, dash] \\
& \mathbf{1} &
\end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_6$ | $\frac{1}{3}$ |
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

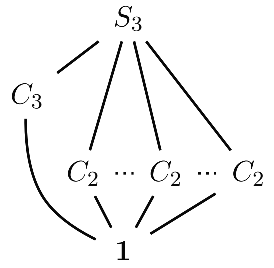
Le groupe $C_6$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_6) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 6 | 4 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_6$.

## $\mathbf{G = S_3}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $S_3$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $S_3$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(S_3) = S_3$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 3 | 3 | 4 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{S_3,\mathbb{C}}$ | 1 | $= 3$ |

## $\mathbf{G = C_7}$


*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_7$ | $\frac{6}{7}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_7$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_7) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 7 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 7 | 2 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}$ | 1 | $\neq 7$ |
| $S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}$ | 1 | $\neq 7$ |
| $S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}$ | 1 | $\neq 7$ |
| $S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}$ | 1 | $\neq 7$ |
| $S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}$ | 1 | $\neq 7$ |

## $\mathbf{G = C_8}$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
C_8 \arrow[d] \\
C_4 \arrow[d] \\
C_2 \arrow[d] \\
\mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_8$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_4$ | 1 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_8$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_8) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 4 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_8,\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2$ |
| $S_{C_8,\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2$ |

## $\mathbf{G = C_4 \times C_2}$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & & C_4 \times C_2 \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
C_4 \arrow[dr] & & C_2 \times C_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & C_4 \arrow[dl] \\
 & C_2 \arrow[dr] & C_2 \arrow[d] & C_2 \arrow[dl] & \\
 & & \mathbf{1} & &
\end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_4 \times C_2$ | 0 |
| $C_4$ | $\frac{1}{4}$ |
| $C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_2$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

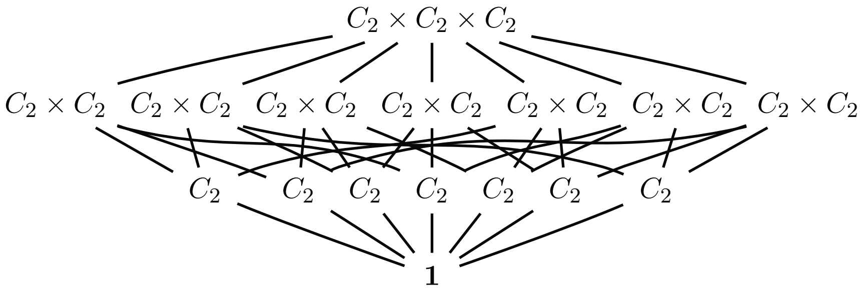
Le groupe $C_4 \times C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_4 \times C_2) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 8 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_4 \times C_2$.

## $\mathbf{G = C_2 \times C_2 \times C_2}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_2 \times C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_2$ | $-8$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

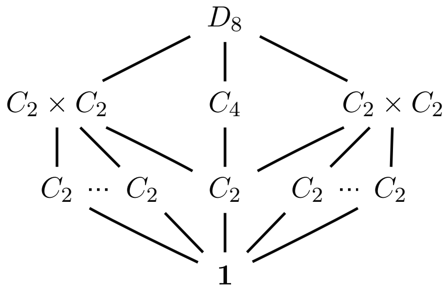
Le groupe $C_2 \times C_2 \times C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_2 \times C_2 \times C_2) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 8 | 8 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 8 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 16 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_2 \times C_2 \times C_2$.

## $\mathbf{G = D_8}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_8$ | 0 |
| $C_4$ | 0 |
| $C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_2$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

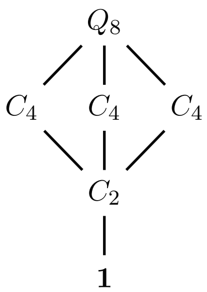
Le groupe $D_8$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(D_8) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 8 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $D_8$.

## $\mathbf{G = Q_8}$




*Treillis des sous-groupes*

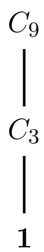
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $Q_8$ | 0 |
| $C_4$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $Q_8$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(Q_8) = C_2 \times C_2$.

| car$(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 6 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $Q_8$.

## $\mathbf{G = C_9}$




*Treillis des sous-groupes*

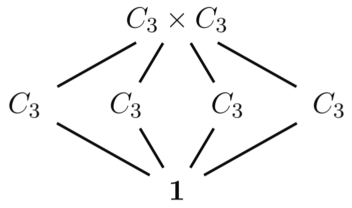
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_9$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_3$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_9$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_9) = \mathbf{1}$.

| car$(k)$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 9 | 3 |

| | Mult. | car$(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6}}$ | 1 | $\neq 3$ |
| $S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}$ | 1 | $\neq 3$ |
| $S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}$ | 1 | $\neq 3$ |
| $S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}$ | 1 | $\neq 3$ |

## $\mathbf{G = C_3 \times C_3}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_3 \times C_3$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

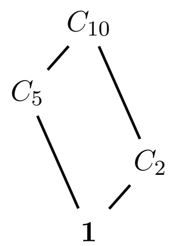
Le groupe $C_3 \times C_3$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(C_3 \times C_3) = C_3 \times C_3$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3\times C_3,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 9 | 6 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_3\times C_3,\mathbb{C}}$ | 1 | $=3$ |

## $\mathbf{G = C_{10}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{10}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $C_5$ | $\frac{4}{5}$ |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

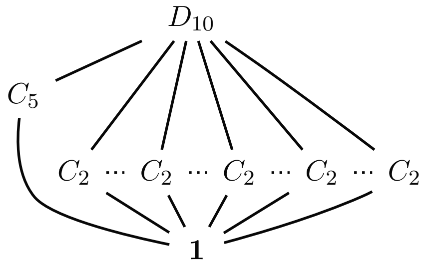
Le groupe $C_{10}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{10}) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 10 | 10 | 4 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_{10}$.

# $\mathbf{G = D_{10}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{10}$ | 0 |
| $C_5$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

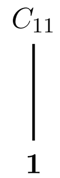
Le groupe $D_{10}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{10}) = D_{10}$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 4 | 4 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{D_{10},\mathbb{C}}$ | 1 | $= 5$ |

# $\mathbf{G = C_{11}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{11}$ | $\frac{10}{11}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

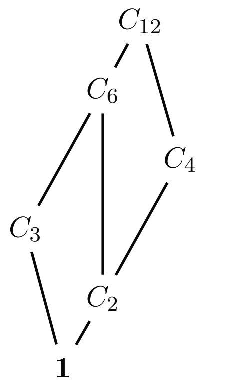
Le groupe $C_{11}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{11}) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 11 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^3}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^5}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^6}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^7}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^8}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^9}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 11 | 2 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^2}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^3}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^4}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^5}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^6}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^7}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^8}}$ | 1 | $\neq 11$ |
| $S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^9}}$ | 1 | $\neq 11$ |

## $\mathbf{G = C_{12}}$



*Treillis des sous-groupes*

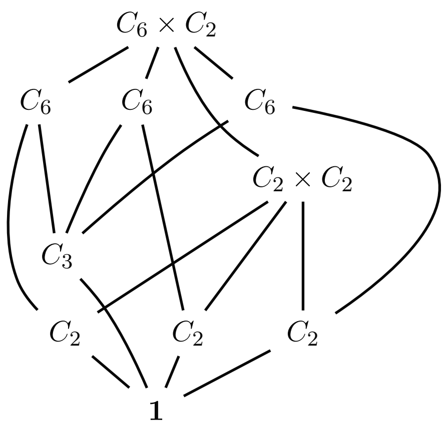
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{12}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $C_6$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_4$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_{12}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{12}) = \mathbf{1}$.

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{12},\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 12 | 9 | 8 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{12},\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2, 3$ |

## $\mathbf{G = C_6 \times C_2}$



*Treillis des sous-groupes*

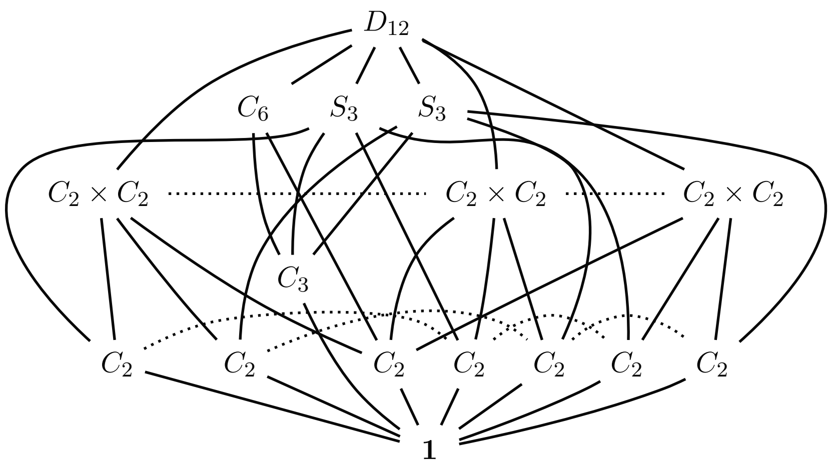
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_6 \times C_2$ | 0 |
| $C_6$ | 0 |
| $C_2 \times C_2$ | 0 |
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_2$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_6 \times C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_6 \times C_2) = C_2 \times C_2$.

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 8 | 8 | 8 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2\times C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 12 | 15 | 8 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_2\times C_2\times C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}$ | 1 | $= 2$ |

## $\mathbf{G = D_{12}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{12}$ | 0 |
| $C_6$ | 0 |
| $S_3$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $C_2$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

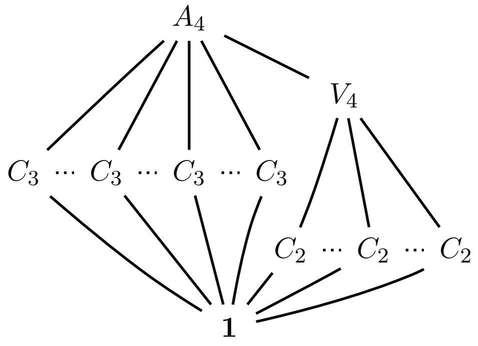
Le groupe $D_{12}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{12}) = D_{12}$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 7 | 8 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $D_{12}$.

## $\mathbf{G = A_4 = (C_2 \times C_2) \rtimes C_3}$



*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $A_4$ | 0 |
| $V_4$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $A_4$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(A_4) = A_4$).

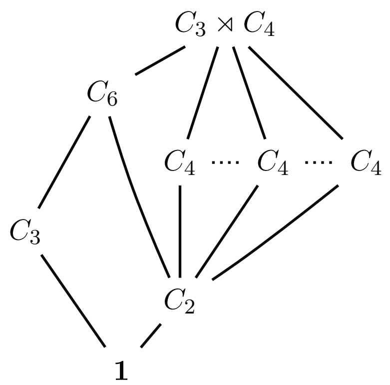
---

| car($k$) | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{A_4,V_1}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{A_4,V_2}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 4 | 7 | 3 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{A_4,V_1}$ | "1" | $= 2$ |
| $S_{A_4,V_2}$ | "1" | $= 2$ |

où $V_1$ et $V_2$ sont des $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(A_4)$-modules simples de dimension 1 qui restent à déterminer (non nécessairement distincts).

## $\mathbf{G = C_3 \rtimes C_4}$



*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_3 \rtimes C_4$ | 0 |
| $C_6$ | 0 |
| $C_3$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_3 \rtimes C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_3 \rtimes C_4) = S_3$).

---

| car($k$) | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3\rtimes C_4,V}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 5 | 8 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_3\rtimes C_4,V}$ | 1 | $= 3$ |

où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_3 \rtimes C_4)$-module simple de dimension 1 qui reste à déterminer.

## $\mathbf{G = C_{13}}$

$$\begin{tikzcd} C_{13} \arrow[d, dash] \\ \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{13}$ | $\frac{12}{13}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

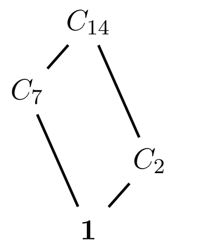
Le groupe $C_{13}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{13}) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | 13 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^3}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^5}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^6}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^7}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^8}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^9}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^{10}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^{11}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 13 | 2 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^2}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^3}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^4}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^5}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^6}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^7}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^8}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^9}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^{10}}}$ | 1 | $\neq 13$ |
| $S_{C_{13},\mathbb{C}_{\xi_{12}^{11}}}$ | 1 | $\neq 13$ |

## $\mathbf{G = C_{14}}$




*Treillis des sous-groupes*

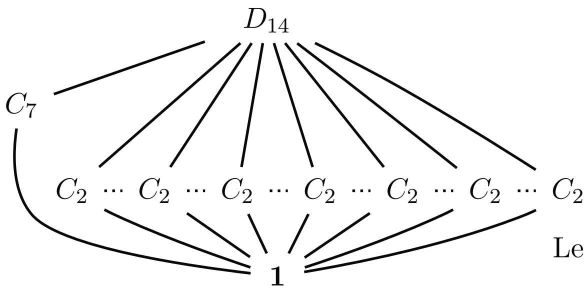
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{14}$ | $\frac{3}{7}$ |
| $C_7$ | $\frac{6}{7}$ |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_{14}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{14}) = \mathbf{1}$.

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 14 | 14 | 4 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_{14}$.

## $\mathbf{G = D_{14}}$




*Treillis des sous-groupes*

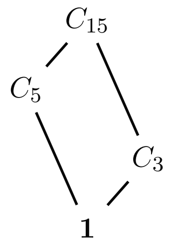
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{14}$ | 0 |
| $C_7$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $D_{14}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{14}) = D_{14}$).

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{14},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 5 | 4 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{D_{14},\mathbb{C}}$ | 1 | $= 7$ |

# $\mathbf{G = C_{15}}$




*Treillis des sous-groupes*

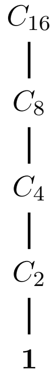
| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{15}$ | $\frac{8}{15}$ |
| $C_5$ | $\frac{4}{5}$ |
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_{15}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{15}) = \mathbf{1}$.

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{15},\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{15},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{15},\mathbb{C}_{\xi_4^3\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 15 | 10 | 6 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{15},\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,5$ |
| $S_{C_{15},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,5$ |
| $S_{C_{15},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,5$ |

# $\mathbf{G = C_{16}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{16}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_8$ | 1 |
| $C_4$ | 1 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_{16}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{16}) = \mathbf{1}$.

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{16},\xi_4\times\mathrm{Id}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{16},\xi_4\times\xi_2}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{16},\xi_4^3\times\mathrm{Id}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{16},\xi_4^3\times\xi_2}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 16 | 5 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{16},\mathbb{C}_{\xi_4\times\mathrm{Id}}}$ | 1 | $\neq 2$ |
| $S_{C_{16},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2$ |
| $S_{C_{16},\mathbb{C}_{\xi_4^3\times\mathrm{Id}}}$ | 1 | $\neq 2$ |
| $S_{C_{16},\mathbb{C}_{\xi_4^3\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2$ |

## $\mathbf{G = C_8 \times C_2}$

Le groupe $C_8 \times C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_8 \times C_2) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 8 | 8 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 16 | 11 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_8 \times C_2$.

## $\mathbf{G = C_4 \times C_4}$

Le groupe $C_4 \times C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_4 \times C_4) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 10 | 10 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 6 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 16 | 15 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_4 \times C_4$.

## $\mathbf{G = D_{16}}$

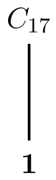
Le groupe $D_{16}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(D_{16}) = C_2 \times C_2$.

---

| car($k$) | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\xi_2\times\xi_2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_8,\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 7 | 11 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $D_{16}$.

## $\mathbf{G = C_{17}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{17}$ | $\frac{16}{17}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

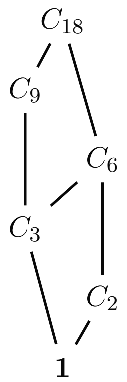
Le groupe $C_{17}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{17}) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | 17 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^2}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^3}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^4}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^5}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^6}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^7}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^8}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^9}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{10}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{11}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{12}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{13}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{14}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{15}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 17 | 2 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^2}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^3}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^4}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^5}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^6}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^7}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^8}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^9}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{10}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{11}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{12}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{13}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{14}}}$ | 1 | $\neq 17$ |
| $S_{C_{17},\mathbb{C}_{\xi_{16}^{15}}}$ | 1 | $\neq 17$ |

# $\mathbf{G = C_{18}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{18}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $C_9$ | $\frac{2}{3}$ |
| $C_6$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_3$ | $1$ |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_{18}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{18}) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,pp_k(G)$ | 18 | 18 | 6 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_{18}$.

# $\mathbf{G = C_6 \times C_3}$

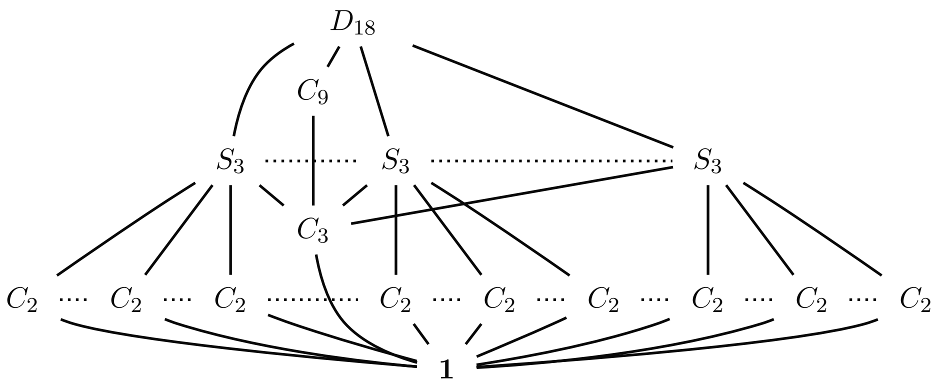
Le groupe $C_6 \times C_3$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_6 \times C_3) = C_3 \times C_3$.

---

| car($k$) | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 10 | 10 | 10 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 8 | 8 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3\times C_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,pp_k(G)$ | 18 | 18 | 12 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,pp_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_6 \times C_3$.

# $\mathbf{G = D_{18}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{18}$ | 0 |
| $C_9$ | 0 |
| $C_3$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $D_{18}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(D_{18}) = S_3$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_2^2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_2^4}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_9,\mathbb{C}_{\xi_2^5}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 6 | 6 | 6 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $D_{18}$.

# $\mathbf{G = S_3 \times C_3}$

Le groupe $S_3 \times C_3$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(S_3 \times C_3) = S_3$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3\times C_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{S_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 9 | 9 | 9 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $S_3 \times C_3$.

## $\mathbf{G = C_{19}}$

$C_{19}$

|

$\mathbf{1}$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{19}$ | $\frac{18}{19}$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

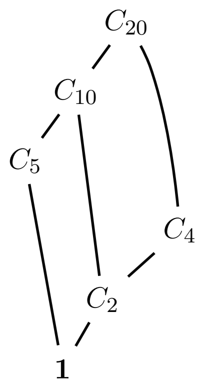
Le groupe $C_{19}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{19}) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 19 |
|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{2}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{3}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{4}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{5}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{6}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{7}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{8}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{9}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{10}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{11}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{12}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{13}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{14}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{15}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{16}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{17}}}(G)$ | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 19 | 2 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{2}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{3}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{4}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{5}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{6}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{7}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{8}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{9}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{10}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{11}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{12}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{13}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{14}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{15}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{16}}}$ | 1 | $\neq 19$ |
| $S_{C_{19},\mathbb{C}_{\xi_{18}^{17}}}$ | 1 | $\neq 19$ |

# $\mathbf{G = C_{20}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{20}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $C_{10}$ | $\frac{4}{5}$ |
| $C_5$ | $\frac{4}{5}$ |
| $C_4$ | $\frac{1}{2}$ |
| $C_2$ | $1$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

Le groupe $C_{20}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{20}) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{20},\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{20},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{20},\mathbb{C}_{\xi_4^3\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 20 | 15 | 8 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{20},\mathbb{C}_{\mathrm{Id}\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2,5$ |
| $S_{C_{20},\mathbb{C}_{\xi_4\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2,5$ |
| $S_{C_{20},\mathbb{C}_{\xi_4^3\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 2,5$ |

# $\mathbf{G = C_{10} \times C_2}$

Le groupe $C_{10} \times C_2$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{10} \times C_2) = C_2 \times C_2$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 8 | 8 | 8 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 20 | 25 | 8 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}$ | 1 | $= 2$ |
| $S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}$ | 1 | $= 2$ |
| $S_{C_2\times C_2\times C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}$ | 1 | $= 2$ |

# $\mathbf{G = D_{20}}$

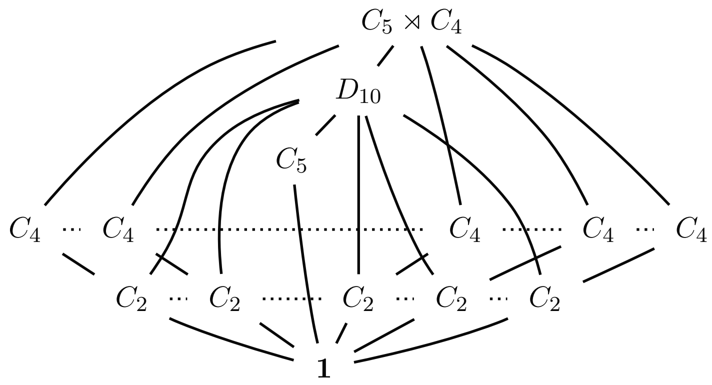
Le groupe $D_{20}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{20}) = D_{20}$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 6 | 6 | 6 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_2\times C_2,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 9 | 8 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $D_{20}$.

# $\mathbf{G = C_5 \rtimes C_4,}$ $\alpha \mapsto \alpha^2$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_5 \rtimes C_4$ | 0 |
| $C_{10}$ | 0 |
| $C_5$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

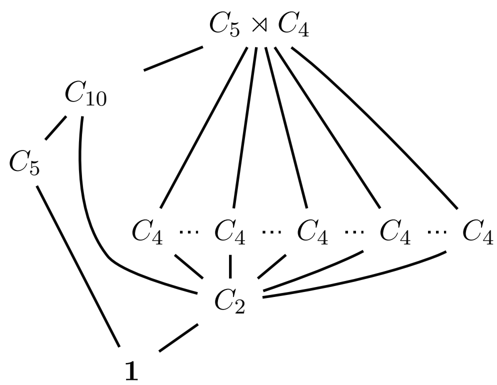
Le groupe $C_5 \rtimes C_4$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(C_5 \rtimes C_4) = C_5 \rtimes C_4$).

---

| car($k$) | 0 | 2 | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5\rtimes C_4,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 | $m_{C_5\rtimes C_4,\mathbb{C}} = 2$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 4 | 8 | |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_5\rtimes C_4,\mathbb{C}}$ | 2 | $= 5$ |

## $\mathbf{G = C_5 \rtimes C_4,}\ \alpha \mapsto \alpha^{-1}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_5 \rtimes C_4$ | 0 |
| $D_{10}$ | 0 |
| $C_5$ | 0 |
| $C_2$ | 1 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_5 \rtimes C_4$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_5 \rtimes C_4) = D_{10}$.

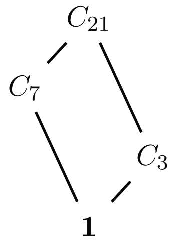
---

| car($k$) | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 5 | 5 | 5 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_4,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5,\mathbb{C}_{\xi_4^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{10},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_5\rtimes C_4,V}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 8 | 7 | 8 |

| | Mult. | car($k$) |
|---|---|---|
| $S_{C_5\rtimes C_4,V}$ | 1 | $= 5$ |

où $V$ est un $\mathbb{C}\,\mathrm{Out}(C_5 \rtimes C_4)$-module simple de dimension 1 qui reste à déterminer.

## $\mathbf{G = C_{21}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{21}$ | $\frac{4}{7}$ |
| $C_7$ | $\frac{6}{7}$ |
| $C_3$ | $\frac{2}{3}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

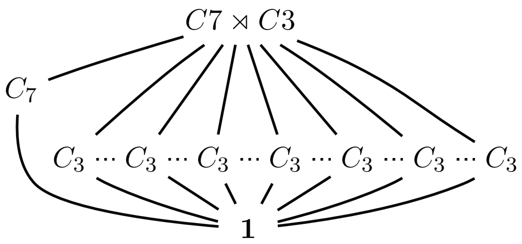
Le groupe $C_{21}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{21}) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 2 | 0 | 2 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6\times\mathrm{Id}}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^3\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^5\times\mathrm{Id}}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^5\times\xi_2}}(G)$ | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 21 | 14 | 6 |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6\times\mathrm{Id}}}$ | 1 | $\neq 3,7$ |
| $S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,7$ |
| $S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^3\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,7$ |
| $S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^5\times\mathrm{Id}}}$ | 1 | $\neq 3,7$ |
| $S_{C_{21},\mathbb{C}_{\xi_6^5\times\xi_2}}$ | 1 | $\neq 3,7$ |

## $\mathbf{G = C_7 \rtimes C_3}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_7 \rtimes C3$ | 0 |
| $C_7$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

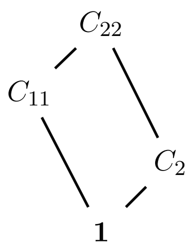
Le groupe $C_7 \rtimes C_3$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(C_7 \rtimes C_3) = C_7 \rtimes C_3$).

---

| car$(k)$ | 0 | 3 | 7 | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_3,\mathbb{C}_{\xi_2}}(G)$ | 1 | | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^2}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^3}}(G)$ | 1 | 1 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^4}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7,\mathbb{C}_{\xi_6^5}}(G)$ | 0 | 0 | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_7\rtimes C_3,\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 | $m_{C_7\rtimes C_3,\mathbb{C}} = 2$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 5 | 4 | 6 | |

| | Mult. | car$(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_7\rtimes C_3,\mathbb{C}}$ | 2 | $=7$ |

# $\mathbf{G = C_{22}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_{22}$ | $\frac{5}{11}$ |
| $C_{11}$ | $\frac{10}{11}$ |
| $C_2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

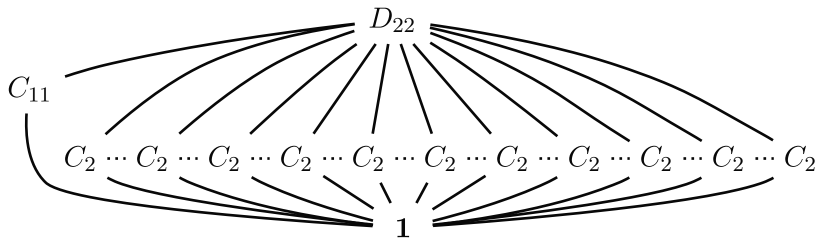
Le groupe $C_{22}$ n'est un $B$-groupe et $\beta(C_{22}) = \mathbf{1}$.

---

| car$(k)$ | 0 | 2 | 11 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^2}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^3}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^4}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^5}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^6}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^7}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^8}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^9}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 22 | 22 | 4 |

Il n'y a pas de facteur de composition de $\mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k$ sur $\mathbb{C}\,\underline{\mathrm{GrB}}$ associé à $C_{22}$.

## $\mathbf{G = D_{22}}$




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{22}$ | 0 |
| $C_{11}$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $D_{22}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{22}) = D_{22}$).

---

| car$(k)$ | 0 | 2 | 11 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^2}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^3}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^4}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^5}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^6}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^7}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^8}}(G)$ | 1 | 1 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{11},\mathbb{C}_{\xi_{10}^9}}(G)$ | 0 | 0 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{22},\mathbb{C}}(G)$ | | | 1 |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | 7 | 7 | 4 |

| | Mult. | car$(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{D_{22},\mathbb{C}}$ | 1 | $= 11$ |

## $\mathbf{G = C_p}$ avec p un nombre premier


*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_p$ | $\frac{p-1}{p}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_p$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_p) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | $p$ | |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 2 | 2 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | 1 | | $0 < r < p-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $p$ | 2 | |

| | Mult. | car($k$) | |
|---|---|---|---|
| $S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_p}}$ | 1 | $\neq p$ | $0 < r < p-1$ |

## $\mathbf{G = C_{pq}}$ avec p et q des nombres premiers distincts

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C_{pq} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ C_p \arrow[dr, dash] & & C_q \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{1} & \end{tikzcd}$$

*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_pq$ | $\frac{(p-1)(q-1)}{pq}$ |
| $C_p$ | $\frac{p-1}{p}$ |
| $C_q$ | $\frac{q-1}{q}$ |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_{pq}$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_{pq}) = \mathbf{1}$.

---

| car($k$) | 0 | $p$ | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 4 | 4 | 4 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | 2 | | 2 | $0 < r < p-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ | 2 | 2 | | $0 < t < q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{pq},\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}\times\xi^t_{q-1}}}(G)$ | 1 | | | $0 < r < p-1, 0 < t < q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $pq$ | $2q$ | $2p$ | |

| | Mult. | car($k$) | |
|---|---|---|---|
| $S_{C_{pq},\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}\times\xi^t_{q-1}}}$ | 1 | $\neq p, q$ | $0 < r < p-1, 0 < t < q-1$ |

## $\mathbf{G = C_p \times C_p \times C_q}$ avec p et q des nombres premiers distincts

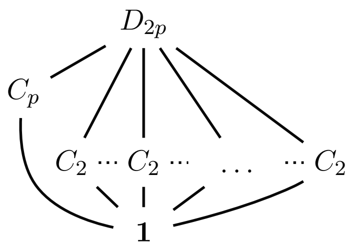
Le groupe $C_p \times C_p \times C_q$ n'est pas un $B$-groupe et $\beta(C_p \times C_p \times C_q) = \mathbf{1}$.

---

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $p$ | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | $2(p+2)$ | $2(p+2)$ | $2(p+2)$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | $2(p+1)$ | | $2(p+1)$ | $0<r<p-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ | $p+2$ | $p+2$ | | $0<t<q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_{pq},\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}\times\xi^t_{q-1}}}(G)$ | $p+1$ | | | $0<r<p-1, 0<t<q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p\times C_p,\mathbb{C}}(G)$ | | $2$ | | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p\times C_p\times C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ | | $1$ | | $0<t<q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $p^2q$ | $(p+3)q$ | $2p^2$ | |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ | |
|---|---|---|---|
| $S_{C_p\times C_p\times C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}$ | $1$ | $=p$ | $0<t<q-1$ |

## $\mathbf{G = D_{2p}}$ où p est un nombre premier impair




*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $D_{2p}$ | $0$ |
| $C_p$ | $0$ |
| $\mathbf{1}$ | $1$ |

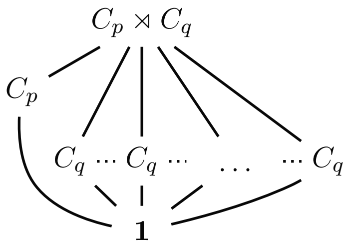
Le groupe $D_{2p}$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(D_{2p}) = D_{2p}$).

---

| $\mathrm{car}(k)$ | $0$ | $2$ | $p$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | $3$ | $3$ | $3$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | $1$ | $1$ | | $0<r<p-1, 2 \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{D_{2p},\mathbb{C}}(G)$ | | | $1$ | |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p+3}{2}$ | $\frac{p+3}{2}$ | $4$ | |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{D_{2p},\mathbb{C}}$ | $1$ | $=p$ |

## $\mathbf{G = C_p \rtimes C_q}$ avec p et q des nombres premiers tels que $\mathbf{q \mid p - 1}$ et l'action est fidèle



*Treillis des sous-groupes*

| $N$ | $m_{G,N}$ |
|---|---|
| $C_p \rtimes C_q$ | 0 |
| $C_p$ | 0 |
| $\mathbf{1}$ | 1 |

Le groupe $C_p \rtimes C_q$ est un $B$-groupe (et donc $\beta(C_p \rtimes C_q) = C_p \rtimes C_q$).

| $\mathrm{car}(k)$ | 0 | $p$ | $q$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbf{1},\mathbb{C}}(G)$ | 3 | 3 | 3 | |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_q,\mathbb{C}_{\xi^t_{q-1}}}(G)$ | 1 | 1 | | $0 < t < q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p,\mathbb{C}_{\xi^r_{p-1}}}(G)$ | 1 | | 1 | $0 < r < p-1, q \mid r$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} S_{C_p \rtimes C_q,\mathbb{C}}(G)$ | | 1 | | $m_{C_p \rtimes C_q,\mathbb{C}} = q-1$ |
| $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,\mathrm{pp}_k(G)$ | $\frac{p-1}{q} + q$ | $2q$ | $\frac{p-1}{q} + 2$ | |

| | Mult. | $\mathrm{car}(k)$ |
|---|---|---|
| $S_{C_p \rtimes C_q,\mathbb{C}}$ | $q-1$ | $= p$ |

# Annexe B

# Une liste de caractères primitifs

Pour utiliser le théorème 2.67, on a besoin du noyau de $\xi$, où $\xi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star \to \mathbb{C}^\star$ est un caractère primitif et $m \in \mathbb{N}^\star$. Dans le tableau ci-dessous, pour un entier $m$, je décris d'abord $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ et je donne les générateurs de ce groupe (c'est un produit de groupes cycliques). Ensuite, je détermine les possibilités pour $\xi$ et je décris son noyau. Le caractère $\xi$ est décrit à partir de la décomposition de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ en produit de groupes cycliques, par ordre décroissant (remarque 4.13).

**Remarque B.1:** Si $l$ est un impair, alors aucun caractère $\xi : (\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z})^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ n'est primitif.

| $m$ | $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Générateurs de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Caractère primitif $\xi$ | Noyau de $\xi$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ | 1 | 1 | 1 |
| 3 | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_2$ | 1 |
| 4 | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | 3 | $\xi_2$ | 1 |
| 5 | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_4$ | 1 |
| | | | $\xi_4^2$ | $1, 4$ |
| | | | $\xi_4^3$ | 1 |
| 7 | $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ | 3 | $\xi_6$ | 1 |
| | | | $\xi_6^2$ | $1, 6$ |
| | | | $\xi_6^3$ | $1, 2, 4$ |
| | | | $\xi_6^4$ | $1, 6$ |
| | | | $\xi_6^5$ | 1 |
| 8 | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $3, 5$ | $\xi_2 \times \xi_2$ | $1, 7$ |
| | | | $\mathrm{Id} \times \xi_2$ | $1, 3$ |
| 9 | $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_6$ | 1 |
| | | | $\xi_6^2$ | $1, 8$ |
| | | | $\xi_6^4$ | $1, 8$ |
| | | | $\xi_6^5$ | 1 |

| $m$ | $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Gén. de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Car. primitif $\xi$ | Noyau de $\xi$ |
|---|---|---|---|---|
| 11 | $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_{10}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{10}^2$ | $1, 10$ |
| | | | $\xi_{10}^3$ | $1$ |
| | | | $\xi_{10}^4$ | $1, 10$ |
| | | | $\xi_{10}^5$ | $1, 4, 5, 9, 3$ |
| | | | $\xi_{10}^6$ | $1, 10$ |
| | | | $\xi_{10}^7$ | $1$ |
| | | | $\xi_{10}^8$ | $1, 10$ |
| | | | $\xi_{10}^9$ | $1$ |
| 12 | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $5, 7$ | $\xi_2 \times \xi_2$ | $1, 11$ |
| 13 | $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_{12}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{12}^2$ | $1, 12$ |
| | | | $\xi_{12}^3$ | $1, 3, 9$ |
| | | | $\xi_{12}^4$ | $1, 8, 12, 5$ |
| | | | $\xi_{12}^5$ | $1$ |
| | | | $\xi_{12}^6$ | $1, 4, 3, 12, 9, 10$ |
| | | | $\xi_{12}^7$ | $1$ |
| | | | $\xi_{12}^8$ | $1, 8, 12, 5$ |
| | | | $\xi_{12}^9$ | $1, 3, 9$ |
| | | | $\xi_{12}^{10}$ | $1, 12$ |
| | | | $\xi_{12}^{11}$ | $1$ |
| 15 | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $11, 2$ | $\mathrm{Id} \times \xi_2$ | $1, 2, 4, 8$ |
| | | | $\xi_4 \times \xi_2$ | $1, 14$ |
| | | | $\xi_4^3 \times \xi_2$ | $1, 14$ |
| 16 | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $7, 3$ | $\xi_4 \times \mathrm{Id}$ | $1, 7$ |
| | | | $\xi_4 \times \xi_2$ | $1, 15$ |
| | | | $\xi_4^3 \times \mathrm{Id}$ | $1, 7$ |
| | | | $\xi_4^3 \times \xi_2$ | $1, 15$ |
| 17 | $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ | 3 | $\xi_{16}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^2$ | $1, 16$ |
| | | | $\xi_{16}^3$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^4$ | $1, 13, 16, 4$ |
| | | | $\xi_{16}^5$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^6$ | $1, 16$ |
| | | | $\xi_{16}^7$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^8$ | $1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2$ |
| | | | $\xi_{16}^9$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^{10}$ | $1, 16$ |
| | | | $\xi_{16}^{11}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^{12}$ | $1, 13, 16, 4$ |
| | | | $\xi_{16}^{13}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{16}^{14}$ | $1, 16$ |
| | | | $\xi_{16}^{15}$ | $1$ |

| $m$ | $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Gén. de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\star$ | Car. primitif $\xi$ | Noyau de $\xi$ |
|---|---|---|---|---|
| 19 | $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ | 2 | $\xi_{18}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{18}^2$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^3$ | $1, 7, 11$ |
| | | | $\xi_{18}^4$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^5$ | $1$ |
| | | | $\xi_{18}^6$ | $1, 8, 7, 18, 11, 12$ |
| | | | $\xi_{18}^7$ | $1$ |
| | | | $\xi_{18}^8$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^9$ | $1, 4, 16, 7, 9, 17, 11, 6, 5$ |
| | | | $\xi_{18}^{10}$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^{11}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{18}^{12}$ | $1, 8, 7, 18, 11, 12$ |
| | | | $\xi_{18}^{13}$ | $1$ |
| | | | $\xi_{18}^{14}$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^{15}$ | $1, 7, 11$ |
| | | | $\xi_{18}^{16}$ | $1, 18$ |
| | | | $\xi_{18}^{17}$ | $1$ |
| 20 | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $3, 11$ | $\mathrm{Id} \times \xi_2$ | $1, 3, 7, 9$ |
| | | | $\xi_4 \times \xi_2$ | $1, 19$ |
| | | | $\xi_4^3 \times \xi_2$ | $1, 19$ |
| 21 | $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $2, 13$ | $\xi_6 \times \mathrm{Id}$ | $1, 13$ |
| | | | $\xi_6 \times \xi_2$ | $1, 20$ |
| | | | $\xi_6^3 \times \xi_2$ | $1, 4, 16, 5, 20, 17$ |
| | | | $\xi_6^5 \times \mathrm{Id}$ | $1, 13$ |
| | | | $\xi_6^5 \times \xi_2$ | $1, 20$ |

# Bibliographie


[Ben04] D.J. Benson. *Representations and cohomology ; Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Bou96] S. Bouc. Foncteurs d'ensembles munis d'une double action. *J. Algebra*, (183) : pages 664–736, 1996.

[Bou10] S. Bouc. *Biset functors for finite groups.* Springer, Berlin, 2010.

[Bro85] M. Broué. On Scott modules and p-permutation modules : An approach through the Brauer morphism. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93(3) :401–408, 1985.

[BST] S. Bouc, R. Stancu, and J. Thévenaz. Simple biset functors and double Burnside ring. preprint 2012.

[CR81] C. W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory : with applications to finite groups and orders*, volume 1. Wiley, New York, 1981.

[CR88] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Wiley, New York, 1988.

[Glu81] D. Gluck. Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the $p$-subgroup simplicial complex. *Illinois J. Math.*, (25) :63–67, 1981.

[Rot95] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[Thé95] J. Thévenaz. *G-Algebras and modular representation theory.* Oxford, Clarendon, 1995.

[Web93] P. Webb. Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, (88 (issues 1-3)) :265–304, 1993.

[Yos83] T. Yoshida. Idempotents in Burnside rings and Dress induction theorem. *J. Algebra*, (80) :90–105, 1983.

# Index

**M**



**S**



**V**

# Curriculum Vitae

BAUMANN Mélanie
melanie.baumann@4096.ch

## Formation et diplômes

| | |
|---|---|
| 2008 | Thèse en mathématiques, EPFL |
| 2003 - 2008 | Master of Science MSc en Mathématiques et prix Douchet, EPFL |
| 2000 - 2003 | Certificat de Maturité avec mention bilingue (français-allemand) et prix de mathématiques (niveau renforcé), Gymnase cantonal de Burier |
| 1991 - 2000 | Certificat d'études secondaires division prégymnasiale |

## Publication

M. Baumann, *The composition factors of the functor of permutation modules*, Journal of Algebra, Volume 344, Issue 1, 15 Octobre 2011, pages 284-295.

## Expérience professionnelle

| | |
|---|---|
| 2006 - 2008 | EPFL : assistante-étudiante, section mathématiques |
| été 2005 | Administration Cantonale des Impôts (Vaud) : traitement des dossiers à l'impôt à la source |
| 2005 - 2007 | Appui de mathématiques dans le cadre de cours privés |
| été 2002/2003 | Colorplaza SA : service clientèle "auxiliaire" |

## Compétences

GNU/Linux, LaTeX, Python, C++

## Langues

| | |
|---|---|
| Français | langue maternelle |
| Anglais | bonne connaissance |
| Allemand | courant |